参考答案

校正自我/学会规范/构建模板/提升成绩

数　学

人教A版·选择性必修·第二册

参考答案

第四章　数列

4.1　数列的概念

第 1 课时　数列的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

确定的顺序　每一个数　第一个位置上　第二个位置上　首项　$\{a_n\}$

知识点二

有限　无限　大于　小于　相等

知识点三

正整数集 $\mathbf{N}^*$　有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$　$\{f(n)\}$

知识点四

序号 n　通项公式　函数解析式

【概念辨析】

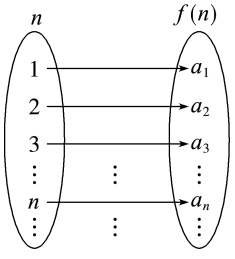
1.(1)×　(2)×　(3)×

2.A　**解析**：$a_6=(-1)^6\times(6^2-1)=35$.故选 A.

3.(1)**提示**：数列中的数讲究顺序，集合中的元素具有无序性；数列中可以出现相同的数，集合中的元素具有互异性；数列是离散的，而集合中的元素并不一定是离散的；数列本质上是函数，而集合不是函数.

(2)**提示**：可以.数列是特殊的函数，函数可用图象法表示，数列$\{a_n\}$的图象由一群孤立的点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$组成.

(3)**提示**：如图，数列$\{a_n\}$可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$）为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量 n 按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的函数值构成数列$\{a_n\}$.不同之处是定义域，数列中的 n 必须是从 1 开始且取值为连续的正整数，函数的定义域可以是任意非空数集.



任务型课堂

任务 1

1.D　**解析**：数列 1,2,3,4,…,n 共 n 项，是有穷数列，A 错误.数列中的项是有次序的，B 错误.数列中的数可以重复出现，C 错误.当 $n=6$ 时，$2\times6+1=13$，D 正确.故选 D.

2.(2)(4)(5)　(2)(5)　(4)　**解析**：(1)是集合，不是数列；(3)不能构成数列，因为没有把所有的无理数按一定顺序排列起来；(2)(4)(5)是数列，其中(4)是无穷数列，(2)(5)是有穷数列.

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：(1)将各项都统一成分数：$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$，所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{n^2}{2}$.

(2)数列各项的绝对值构成数列 1,3,5,7,9,…，是连续的正奇数，其通项公式为 $A_n=2n-1$.考虑$(-1)^{n+1}$具有转换符号的作用，所以原数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

(3)各项加 1 后，分别变为 10,100,1 000,10 000,…，此数列的通项公式为 $A_n=10^n$，可得原数列的一个通项公式为 $a_n=10^n-1$.

(4)数列中的每一项均由三部分组成，分母是从 1 开始的连续奇数，其通项公式为 $A_n=2n-1$.分子的前一部分是从 2 开始的连续自然数的平方，其通项公式为 $B_n=(n+1)^2$；分子的后一部分是减去一个自然数，减去的自然数的通项公式为 $C_n=n$.综合得原数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{(n+1)^2-n}{2n-1}$.

(5)这个数列的前 4 项的绝对值都等于序号与序号加 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$.

(6)由于该数列中的奇数项全部都是 4，偶数项全部都是 0，因此可用分段函数的形式表示数列的通项公式，即 $a_n=\begin{cases}4,n\text{ 为奇数},\\0,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$该数列也可改写为 2+2,2−2,2+2,2−2,2+2,2−2,…，因此其通项公式又可以表示为 $a_n=2+2\times(-1)^{n+1}$.

[一题多思]

思考 1.提示：将数列的前几项统一形式更有利于写出数列的通项公式.

如(1)改写为$\frac{1^2}{2},\frac{2^2}{2},\frac{3^2}{2},\frac{4^2}{2},\frac{5^2}{2},\cdots$，写出 $a_n=\frac{n^2}{2}$；

(2)改写为$(-1)^2(2\times1-1),(-1)^3(2\times2-1),(-1)^4(2\times3-1),(-1)^5(2\times4-1),(-1)^6(2\times5-1),\cdots$，写出 $a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

思考 2.提示：易知将数列 9,99,999,9 999,…的每一项先除以 9，再乘 5，可得数列 5,55,555,5 555,…，故所求数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$.

【应用迁移】

解：(1)因为 $3=2^1+1,5=2^2+1,9=2^3+1,17=2^4+1$，

$33=2^5+1$,…,所以该数列的一个通项公式为 $a_n=2^n+1$.

(2)这个数列可以改写为 10+1,100+2,1 000+3,10 000+4,…,所以该数列的一个通项公式是 $a_n=10^n+n$.

(3)因为 $1\frac{1}{2}=1+\frac{1^2}{1^2+1}$,$2\frac{4}{5}=2+\frac{2^2}{2^2+1}$,$3\frac{9}{10}=3+\frac{3^2}{3^2+1}$,$4\frac{16}{17}=4+\frac{4^2}{4^2+1}$,…,所以该数列的一个通项公式为 $a_n=n+\frac{n^2}{n^2+1}$.

(4)将数列变形为 1×2,-2×3,3×4,-4×5,5×6,-6×7,…,

所以该数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}n(n+1)$.

任务 3

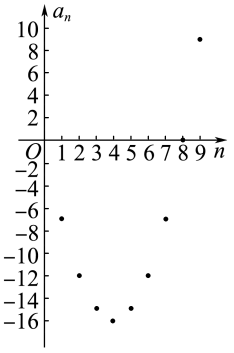
【探究活动】

例 2 (1)C **解析**:由数列$\{a_n\}$是递增数列可得 $a_{n+1}>a_n$ 恒成立,即 $\lambda(n+1)^2-2(n+1)-\lambda n^2+2n>0$,整理可得 $\lambda>\frac{2}{2n+1}$,该式对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.又因为函数 $y=\frac{2}{2x+1}$ 为$(0,+\infty)$上的单调递减函数,所以 $\left(\frac{2}{2n+1}\right)_{\max}=\frac{2}{3}$,所以 $\lambda>\frac{2}{3}$.故选 C.

(2)**解**:①列表:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	−7	−12	−15	−16	−15	−12	−7	0	9	…

描点,画出$\{a_n\}$的图象如图所示.



②数列$\{a_n\}$在 $n=1,2,3,4$ 时是递减的,在 $n=4,5,6,7,\cdots$ 时是递增的.

【应用迁移】

1.解:(1)由 $n^2-5n+4<0$,得 $1<n<4$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n=2$ 或 $n=3$.

所以数列$\{a_n\}$中有 2 项为负数.

(2)因为 $a_n=n^2-5n+4=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,a_n 有最小值 −2.

2.解:设 $a_n(n\geqslant2)$为数列$\{a_n\}$中的最大项,

所以 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$即 $\begin{cases}(n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1},\\(n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+3)\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1},\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}(n+2)\cdot\frac{9}{10}\geqslant n+1,\\n+2\geqslant(n+3)\cdot\frac{9}{10},\end{cases}$ 解得 $7\leqslant n\leqslant8$.

故$\{a_n\}$中的最大项为 $a_7=a_8=\frac{9^8}{10^7}$.

第 2 课时　数列的递推公式及前 n 项和

问题式预习

【知识清单】

知识点一

递推

知识点二

(1)n　$a_1+a_2+\cdots+a_n$　(2)序号 n　前 n 项和

(3)$\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2\end{cases}$

【概念辨析】

1.(1)√

(2)√　**提示**:因为 $a_1=2$,$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(3)×　**提示**:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1$;当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$,所以 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

2.−9　−7　**解析**:因为 $S_n=n^2-10n$,所以 $a_1=S_1=1^2-10\times1=-9$,$a_2=S_2-S_1=2^2-10\times2-(-9)=-7$.

3.(1)**提示**:不一定.例如,$\sqrt{2}$ 精确到 1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值组成的数列:1,1.4,1.41,1.414,…没有递推公式.

(2)**提示**:仅由数列$\{a_n\}$满足的递推公式 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$只能得出相邻两项的关系,无法确定这个数列.若已知 $a_1=1$,则可以确定这个数列为 1,2,4,8,….

任务型课堂

任务 1

1.(1)7　(2)−20　**解析**:(1)令 $a_n<0$,即 $n^2-7n-8<0$,得 $-1<n<8$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的值为 1,2,3,…,7,

所以数列从第 1 项至第 7 项均为负数,共 7 项.

(2)(方法一)$a_n=n^2-7n-8$ 是关于 n 的二次函数,图象的对称轴方程为 $n=\frac{7}{2}=3.5$,

所以当 $1\leqslant n\leqslant3$ 时,$\{a_n\}$递减;

当 $n\geqslant4$ 时,$\{a_n\}$递增.

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,a_n 最小,即 a_3,a_4 是数列中的最小项,且 $a_3=a_4=-20$.

(方法二)设 $a_n(n\geqslant2)$为数列$\{a_n\}$中的最小项.

则 $\begin{cases}a_n\leqslant a_{n-1},\\a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}n^2-7n-8\leqslant(n-1)^2-7(n-1)-8,\\n^2-7n-8\leqslant(n+1)^2-7(n+1)-8,\end{cases}$

解得 $3\leqslant n\leqslant4$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,a_n 最小,即 a_3,a_4 是数列中的最小项,且 $a_3=a_4=-20$.

2.解:(1)根据 $a_n=3n^2-28n$,

得 $a_4=3\times4^2-28\times4=-64$，

$a_6=3\times6^2-28\times6=-60$.

(2)令 $3n^2-28n=-49$，

即 $3n^2-28n+49=0$，解得 $n=7$ 或 $n=\frac{7}{3}$(舍去).

所以 -49 是该数列的第 7 项.

(3)令 $3n^2-28n=68$，即 $3n^2-28n-68=0$，

解得 $n=-2$ 或 $n=\frac{34}{3}$，均不是正整数，

所以 68 不是数列$\{a_n\}$中的项.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)D **解析**：因为 $a_1=6$，$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，所以 $a_2=\frac{1+6}{1-6}=-\frac{7}{5}$，$a_3=\frac{1-\frac{7}{5}}{1+\frac{7}{5}}=-\frac{1}{6}$，$a_4=\frac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}=\frac{5}{7}$，$a_5=\frac{1+\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}=6$，…，所以$\{a_n\}$是周期为 4 的数列，故 $a_{985}=a_1=6$.故选 D.

(2)**解**：由题意，得 $a_2=3a_1+\frac{(-1)^2}{2}$，

又 $a_1=1$，所以 $a_2=3\times1+\frac{(-1)^2}{2}=\frac{7}{2}$.

同理，$a_3=3a_2+\frac{(-1)^3}{2}=10$，

$a_4=3a_3+\frac{(-1)^4}{2}=\frac{61}{2}$，

$a_5=3a_4+\frac{(-1)^5}{2}=91$.

【应用迁移】

1.B **解析**：因为 $a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2)$，所以 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{-\frac{1}{4}}=5$，$a_3=1-\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，$a_4=1-\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{\frac{4}{5}}=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$，…，可知数列$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列.因为 $100=33\times3+1$，所以 $a_{100}=a_1=-\frac{1}{4}$.故选 B.

2.B **解析**：因为 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$，所以 $a_2=\frac{a_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_1+1}=-\sqrt{3}$，$a_3=\frac{a_2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_2+1}=\sqrt{3}$，$a_4=\frac{a_3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_3+1}=0$，…，

所以数列$\{a_n\}$的各项依次为 $0,-\sqrt{3},\sqrt{3},0,-\sqrt{3},\sqrt{3}$，…，周期为 3.

因为 $20=6\times3+2$，所以 $a_{20}=a_2=-\sqrt{3}$.故选 B.

3.解：由题意得，$a_1=10$，$a_2=\frac{a_1}{2}=5$，$a_3=a_2+3=8$，$a_4=\frac{a_3}{2}=4$，$a_5=\frac{a_4}{2}=2$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5^1-1=4$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5^n-5^{n-1}=4\times5^{n-1}$.

由于 $a_1=4$ 也满足 $a_n=4\times5^{n-1}$，

因此，数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=4\times5^{n-1}$.

[一题多思]

思考 1.提示：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5+1=6$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n+1)-(5^{n-1}+1)=4\times5^{n-1}$.由于 $a_1=6$ 不满足 $a_n=4\times5^{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}6,n=1,\\4\times5^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

思考 2.提示：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3+r$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n+r)-(3^{n-1}+r)$

$=3\times3^{n-1}-3^{n-1}$

$=2\times3^{n-1}$.

令 $3+r=2\times3^0$，解得 $r=-1$.

所以当 $r=-1$ 时，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\times3^{n-1}$；

当 $r\neq-1$ 时，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3+r,n=1,\\2\times3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

【应用迁移】

1.D **解析**：由题意得 $a_5+a_6=S_6-S_4=2^6-2^4=48$，$a_2=S_2-S_1=2^2-2^1=2$，所以 $\frac{a_5+a_6}{a_2}=24$.故选 D.

2.解：(1)由数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=32n-n^2+1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=32-1+1=32$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(32n-n^2+1)-[32(n-1)-(n-1)^2+1]=33-2n$.在 $a_n=33-2n$ 中，

令 $n=1$，得 $a_1=33-2\times1=31$，不满足 $a_1=32$.

所以数列的通项公式为 $a_n=\begin{cases}32,n=1,\\33-2n,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)因为 $S_n=32n-n^2+1=-(n^2-32n)+1=-(n-16)^2+257$，

所以当 $n=16$ 时，S_n 有最大值为 257.

所以前 16 项的和最大.

微专题培优(一) 由递推公式求数列通项公式的常见方法

类型 1

例 1 (1)D **解析**：因为 $a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2^n$，即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2^{n-1}$.所以 $\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1$，即 $\frac{1}{a_n}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}(n\geqslant2)$.又 $a_1=1$ 也符合该式，故 $a_n=$

$\frac{1}{2^n-1}$.故选 D.

(2)B　**解析**:记第 n 层有 a_n 个球,则 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=10,a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,a_4-a_3=4,\cdots,a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2)$,则第 30 层的小球个数为 $a_{30}=(a_{30}-a_{29})+(a_{29}-a_{28})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=30+29+28+\cdots+2+1=\frac{30\times(30+1)}{2}=465$.故选 B.

【对点训练】

1.A　**解析**:由题意可得 $a_{1\,000}-a_{999}=\lg\frac{1\,000}{999}$,$a_{999}-a_{998}=\lg\frac{999}{998}$,$\cdots$,$a_3-a_2=\lg\frac{3}{2}$,$a_2-a_1=\lg\frac{2}{1}$,各式相加可得 $a_{1\,000}-a_1=\lg\frac{1\,000}{999}+\lg\frac{999}{998}+\cdots+\lg\frac{3}{2}+\lg\frac{2}{1}=\lg 1\,000=3$.因为 $a_1=1\,023$,所以 $a_{1\,000}=1\,026$.故选 A.

2.D　**解析**:设第 n 个图案的点子数为 a_n,由题意得 $a_1=3,a_{n+1}-a_n=2n,a_n-a_{n-1}=2(n-1)=2n-2$,则 $a_2-a_1=2,a_3-a_2=4,a_4-a_3=6,\cdots$,可得 $a_2-a_1+\cdots+a_n-a_{n-1}=2+\cdots+2n-2=\frac{(n-1)(2+2n-2)}{2}$,则 $a_n-3=n(n-1)$,即 $a_n=n^2-n+3$,所以 $a_7=45$.故选 D.

类型 2

例 2　(1)C　**解析**:因为 $a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$,则 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$,所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{n}$.当 $n=1$ 时,$a_1=1$,符合上式,故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$.故选 C.

(2)B　**解析**:当 $n=1$ 时,$2S_1=a_1\Rightarrow 2a_1=a_1\Rightarrow a_1=0$.由 $S_2=a_1+a_2=1$,得 $a_2=1$.由 $2S_n=na_n$,得 $2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$,两式相减得 $2S_{n+1}-2S_n=(n+1)a_{n+1}-na_n\Rightarrow 2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}$,所以 $a_{25}=a_2\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{25}}{a_{24}}=1\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{24}{23}=24$.故选 B.

【对点训练】

1.B　**解析**:由题意得 $a_{n+1}=2^n a_n$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$,所以 $\frac{a_2}{a_1}=2^1,\frac{a_3}{a_2}=2^2,\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$.将上面 $(n-1)$ 个式子两端分别相乘,可得 $\frac{a_n}{a_1}=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$,即 $a_n=2\times 2^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$,所以 $a_8=2^{29}$.故选 B.

2.$2^{1\,013}$　**解析**:令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,则 $b_n+b_{n+1}=3$①.又 $b_{n+1}+b_{n+2}=3$②,由②−①得 $b_{n+2}-b_n=0$,即 $b_{n+2}=b_n$.因为 $b_1=\frac{a_2}{a_1}=2$,所以 $b_2=3-b_1=1$,所以 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}1,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\2,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$所以 $a_{2\,026}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{2\,025}}{a_{2\,024}}\times\frac{a_{2\,026}}{a_{2\,025}}=1\times 2\times 1\times 2\times\cdots\times 1\times 2=2^{1\,013}$.

类型 3

例 3　B　**解析**:因为 $a_{n+1}=2a_n+3$,所以 $a_{n+1}+3=2a_n+6=2(a_n+3)$,即 $\frac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$.所以数列 $\{a_n+3\}$ 是以 $a_1+3=4$ 为首项,2 为公比的等比数列,则 $a_n+3=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$,即 $a_n=2^{n+1}-3$.所以 $a_{10}=2^{10+1}-3=2\,048-3=2\,045$.故选 B.

【对点训练】

D　**解析**:由 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$,得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$.又 $\frac{1}{a_1}=2$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 2 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,所以 $\frac{1}{a_n}=2+\frac{n-1}{2}=\frac{n+3}{2}$,即 $a_n=\frac{2}{n+3}$.所以 $a_{10}=\frac{2}{13}$.故选 D.

类型 4

例 4　$\frac{2}{n+1}$　**解析**:因为 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$,$a_1=1$,所以 $a_n\neq 0$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$,即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$.又 $a_1=1$,则 $\frac{1}{a_1}=1$,所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$.所以 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

【对点训练】

B　**解析**:在数列 $\{a_n\}$ 中,由 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{1}{a_n}$,即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$,公差为 3 的等差数列,所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+3(n-1)=\frac{6n-5}{2}$,所以 $a_n=\frac{2}{6n-5}$.故选 B.

4.2　等差数列

4.2.1　等差数列的概念

第 1 课时　等差数列的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

第 2 项　前一项　同一个常数　公差　d　$a+b$

知识点二

(1)$a_n=a_1+(n-1)d$

知识点三

(1)dn　$f(n)$

(2)$2k+b$　$nk+b$　$\{nk+b\}$　k

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√

2.D　**解析**:因为 $a_1=5,d=3$,所以 $a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$.令 $3n+2=2\,024$,得 $n=674$.故选 D.

3.(1)**提示**:不是.该数列为 1,3,4,5,6,…,第 2 项与第 1 项的差是 2,从第 3 项起,每一项与它的前一项的差都是 1,不符合等差数列的定义.

(2)**提示**:不是.等差数列的定义中"每一项与它的前一项的差"是指"相邻两项中用后项减去前项".

(3)**提示**:任意两个数都有等差中项.

(4)**提示**:不一定.若公差 $d>0$,则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;若公差 $d<0$,则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;若公差 $d=0$,则数列 $\{a_n\}$ 为常数列.

任务型课堂

任务 1

1.AC　**解析**:对于 A,由 $a-b=b-c$ 及等差数列的定义,可得 a,b,c 成等差数列,A 正确;对于 B,n 不是常数,该数列不是等差数列,B 错误;对于 C,根据等差数列的定义可知,C 正确;对于 D,公差应为相邻两项中后项与前项之差,D 错误.故选 AC.

2.0　**解析**:因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $a_{n+1}-a_n$ 为常数,即 $[a(n+1)^2+(n+1)]-(an^2+n)=2an+a+1$ 为常数,所以 $2a=0$,解得 $a=0$.

3.2　**解析**:因为 $1,a+1,a+3$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项,所以 $2(a+1)=1+a+3$,解得 $a=2$.

任务 2

【探究活动】

例 1　B　**解析**:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 $a_1=5$,$a_m=3$,所以 $5+(m-1)d=3$,所以 $d=\dfrac{-2}{m-1}$.则 $a_{m+2}=5+(m+1)d=5-\dfrac{2(m+1)}{m-1}=3-\dfrac{4}{m-1}$.故选 B.

【应用迁移】

1.解:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $\begin{cases}a_3=\dfrac{5}{4},\\ a_7=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+2d=\dfrac{5}{4},\\ a_1+6d=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{11}{4},\\ d=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

所以 $a_{15}=a_1+(15-1)d=\dfrac{11}{4}+14\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{31}{4}$.

2.解:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $a_1+a_3+a_5=3a_3=18$,得 $a_3=6$,

由 $a_5+a_7=2a_6=-6$,得 $a_6=-3$,

故公差 $d=\dfrac{a_6-a_3}{6-3}=\dfrac{-3-6}{3}=-3$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_3+(n-3)d=6-3(n-3)=-3n+15$.

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**:因为 $\dfrac{1}{a}$,$\dfrac{1}{b}$,$\dfrac{1}{c}$ 成等差数列,所以 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$,

因此 $2\cdot\dfrac{a+c}{b}-\dfrac{b+c}{a}-\dfrac{a+b}{c}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)(a+c)-\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=2-b\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)=0$,

所以 $\dfrac{b+c}{a}$,$\dfrac{a+c}{b}$,$\dfrac{a+b}{c}$ 成等差数列.

[一题多思]

思考 1.提示:设这个等差数列为 $\{a_n\}$,

则 $a_3=\dfrac{a_1+a_5}{2}=\dfrac{7+21}{2}=14$,

$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}=\dfrac{7+14}{2}=\dfrac{21}{2}$,

$a_4=\dfrac{a_3+a_5}{2}=\dfrac{14+21}{2}=\dfrac{35}{2}$,

所以插入的 3 个数依次为 $\dfrac{21}{2}$,14,$\dfrac{35}{2}$.

思考 2.提示:由 m 和 $2n$ 的等差中项为 4,得 $m+2n=8$.

又由 $2m$ 和 n 的等差中项为 5,得 $2m+n=10$.

两式相加,得 $m+n=6$.

所以 m 和 n 的等差中项为 $\dfrac{m+n}{2}=3$.

【应用迁移】

1.解:因为 a 和 $2b$ 的等差中项是 5,所以 $a+2b=10$①.又因为 $3a$ 和 $4b$ 的等差中项是 7,所以 $3a+4b=14$②.

由①②解得 $\begin{cases}a=-6,\\ b=8.\end{cases}$

所以 $2a$ 和 $3b$ 的等差中项为 $\dfrac{2\times(-6)+3\times8}{2}=6$.

2.解:由 $x_1=3$,得 $2p+q=3$①.

又 $x_4=2^4p+4q=16p+4q$,$x_5=2^5p+5q=32p+5q$,且 $x_1+x_5=2x_4$,

所以 $3+32p+5q=32p+8q$,解得 $q=1$②.

将②代入①,得 $p=1$.

故 $p=1$,$q=1$.

第 2 课时　等差数列的性质及应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

1.(1)pd_1+qd_2　(2)md

2.(2)$a_m+a_n=a_p+a_q$　$a_m+a_n=2a_k$

【概念辨析】

1.(1)×

(2)√　**提示**:设 $\{a_n\}$ 的公差为 d(d 为常数),则 $2a_{n+1}+(n+1)-(2a_n+n)=2(a_{n+1}-a_n)+1=2d+1$,为常数,因此 $\{2a_n+n\}$ 是等差数列.

(3)√

2.B　**解析**:因为 $a_7+a_{19}=a_9+a_{17}=19$,且 $a_9=1$,所以 $a_{17}=19-a_9=18$.

3.(1)**提示**:可以.因为等差数列 $\{a_n\}$ 的图象是均匀分布在一条直线上的孤立的点,任选其中两点 (n,a_n),(m,a_m) $(m\neq n)$,类比直线的斜率公式,可知公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

(2)**提示**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，其奇数项为$a_1,a_3,a_5,\cdots$，是公差为$2d$的等差数列.同样，偶数项也是公差为$2d$的等差数列.从等差数列中，每隔一定的距离抽取一项，组成的数列仍为等差数列.

(3)**提示**：不一定.例如：1,2,3,…和10,11,12,…都是公差为1的等差数列，但是1,10,2,11,3,12,…不是等差数列.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1 **解**：(1)由等差数列的性质，得$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=a_1+a_9$，所以$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=70$，得$a_5=14$，故$a_1+a_9=2a_5=28$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公差分别为d_1,d_2.

由$a_7-b_7=2+6d_1-(-3+6d_2)=5+6(d_1-d_2)=17$，得$d_1-d_2=2$.

所以$a_{19}-b_{19}=2+18d_1-(-3+18d_2)=5+18(d_1-d_2)=5+18\times2=41$.

【应用迁移】

1.D **解析**：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_1+a_9=2a_5$，即$a_1+a_5+a_9=3a_5=6$，解得$a_5=2$，故$\tan\dfrac{\pi}{3a_5}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故选D.

2.C **解析**：由$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=5a_6=80$，所以$a_6=16$，所以$a_7-\dfrac{1}{2}a_8=\dfrac{1}{2}(2a_7-a_8)=\dfrac{1}{2}(a_6+a_8-a_8)=\dfrac{1}{2}a_6=8$.故选C.

任务2

【探究活动】

例2 (1)**解**：由已知，得$a_2-2a_1=4$，则$a_2=2a_1+4$.

又$a_1=1$，所以$a_2=6$.由$2a_3-3a_2=12$，

得$2a_3=12+3a_2$，所以$a_3=15$.

(2)**证明**：由$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$，

得$\dfrac{na_{n+1}-(n+1)a_n}{n(n+1)}=2$，即$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=2$.

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是首项为1，公差为$d=2$的等差数列.

所以$\dfrac{a_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$.所以$a_n=2n^2-n$.

[一题多思]

思考1.提示：需要证明$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=$常数.

思考2.提示：能判断数列$\{na_n\}$是等差数列.

因为$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant2)$，

所以$na_n-(n-1)a_{n-1}=(n+1)a_{n+1}-na_n(n\geqslant2)$.

故数列$\{(n+1)a_{n+1}-na_n\}$为常数列，且$2a_2-a_1=5$，

所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=5$，

因此数列$\{na_n\}$是以1为首项，5为公差的等差数列.

所以$na_n=1+5(n-1)=5n-4$，因此$a_n=\dfrac{5n-4}{n}$.

【应用迁移】

(1)**证明**：由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{a_n}=1+\dfrac{1}{a_n}$，

则$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，即$b_{n+1}-b_n=1$.又$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)得，$b_n=\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n$，则$a_n=\dfrac{1}{n}$.

任务3

【探究活动】

例3 **解**：(1)设第$n(n\in\mathbf{N}^*)$年的利润为a_n万元，

则$a_1=200$，$a_n-a_{n-1}=-20(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以每年的利润可构成一个等差数列$\{a_n\}$，且公差$d=-20$.

所以$a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)\times(-20)=220-20n$.

若$a_n<0$，则该公司经销这一产品将会亏损.

由$a_n=220-20n<0$，得$n>11$.

故从第12年起，该公司经销这一产品将会亏损.

(2)由题易知，自下而上各高度的气温构成等差数列，设为$\{a_n\}$，公差为d，则$a_1=8.5$，$a_5=-17.5$.

由$a_5=a_1+4d=8.5+4d=-17.5$，解得$d=-6.5$.

所以$a_n=15-6.5n(1\leqslant n\leqslant10,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$a_2=2$，$a_4=-11$，$a_8=-37$，

即2 km，4 km，8 km高度的气温分别为2 ℃，−11 ℃，−37 ℃.

【应用迁移】

解：用数列$\{a_n\}$表示梯子自上而下各级宽度所构成的等差数列，其公差设为d.

由已知，得$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$.

则$a_{12}=a_1+(12-1)d$，

即$110=33+11d$，解得$d=7$.

因此，$a_2=40$，$a_3=47$，$a_4=54$，$a_5=61$，$a_6=68$，$a_7=75$，$a_8=82$，$a_9=89$，$a_{10}=96$，$a_{11}=103$.

所以，梯子中间各级的宽度从上而下依次是40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm.

任务4

【探究活动】

例4 **解**：(1)(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

依题意，得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=18,\\a_1a_2a_3=66,\end{cases}$

所以$\begin{cases}3a_1+3d=18,\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=66,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=11,\\d=-5\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=1,\\d=5.\end{cases}$

因为数列$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$.

故$a_1=11$，$d=-5$.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$，

即等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-5n+16$.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-d$，a，

$a+d$，则$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18,\\ a(a-d)(a+d)=66,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\ d=\pm5.\end{cases}$

又因为数列$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$，

所以$a=6,d=-5$.

所以等差数列$\{a_n\}$的首项为11，公差为-5.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$.

(2)记数列2，5，8，…，197为$\{a_n\}$，由已知得，数列$\{a_n\}$的首项为2，公差为3，

所以通项公式为$a_n=3n-1(1\leqslant n\leqslant66)$.

记数列2，7，12，…，197为$\{b_m\}$，由已知得，数列$\{b_m\}$的首项为2，公差为5，则$b_m=5m-3(1\leqslant m\leqslant40)$.

(方法一)若数列$\{a_n\}$的第n项与数列$\{b_m\}$的第m项相同，

即$a_n=b_m$，则$3n-1=5m-3$，

所以$n=\dfrac{5m-2}{3}=m+\dfrac{2(m-1)}{3}$.

又$n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m\leqslant40$，所以$m-1=3k$，即$m=3k+1(k\in\mathbf{N})$.

所以$m=1,4,7,\cdots,40$.

所以两个数列的相同项为2，17，32，…，197.

记两个数列的相同项构成的数列为$\{c_n\}$，则$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=15n-13$，共有$\dfrac{40-1}{3}+1=14$(个)相同项.

(方法二)设它们的相同项构成的数列为$\{c_n\}$，则$c_1=2$.

因为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为等差数列，所以数列$\{c_n\}$仍为等差数列，且公差$d=15$.

所以$c_n=c_1+(n-1)d=2+(n-1)\times15=15n-13$.

令$2\leqslant15n-13\leqslant197$，得$1\leqslant n\leqslant14$，所以两数列共有14个相同项.

【应用迁移】

解：设这四个数分别为$a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

根据题意，得

$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\ (a-d)(a+d)=40,\end{cases}$

化简，得$\begin{cases}4a=26,\\ a^2-d^2=40,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{13}{2},\\ d=\pm\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为2，5，8，11或11，8，5，2.

4.2.2 等差数列的前n项和公式

第1课时 等差数列的前n项和

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

知识点二

(1)$\dfrac{d}{2}$ (2)m^2d

【概念辨析】

1.(1)√ **提示**：根据等差数列的前n项和公式$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$可知，此说法正确.

(2)× (3)×

2.B **解析**：$S_{30}=\dfrac{30\times(a_1+a_{30})}{2}=\dfrac{30\times(1+30)}{2}=465$.故选B.

3.(1)**提示**：把$a_n=a_1+(n-1)d$代入$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$中，就可以得到$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

(2)**提示**：若已知等差数列$\{a_n\}$的首项a_1、末项a_n及项数n，则用公式$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$来求和，其中$\dfrac{a_1+a_n}{2}$是$a_1$与$a_n$的等差中项，应用时要注意结合等差数列的性质.若已知等差数列$\{a_n\}$的首项a_1、公差d及项数n，则用公式$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$来求和.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1 (1)A **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_4=7$且$S_5=25$，可得$\begin{cases}a_1+3d=7,\\ 5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=25,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2.\end{cases}$故选A.

(2)C **解析**：设公差为d，因为$a_4+a_5=24$，$S_6=48$，所以$\begin{cases}a_1+3d+a_1+4d=24,\\ 6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=48,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-2,\\ d=4,\end{cases}$所以$\{a_n\}$的公差为4.故选C.

(3)**解**：由$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\times(1-512)}{2}=-1\,022$，解得$n=4$.

又由$a_n=a_1+(n-1)d$，得$-512=1+(4-1)\times d$，解得$d=-171$.

【应用迁移】

1.B **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则由题意可得$\begin{cases}3a_1+3d=6,\\ 5a_1+10d=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-3,\\ a_1=5,\end{cases}$所以$S_6=6a_1+15d=6\times5+15\times(-3)=-15$.故选B.

2.95 **解析**：设数列$\{a_n\}$的公差为d.

由题意，得$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7,\\ 3(a_1+d)+a_1+4d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-4,\\ d=3,\end{cases}$

则$S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=10\times(-4)+45\times3=95$.

任务2

【探究活动】

例2 (1)A **解析**：因为两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{5n+2}{n+3}$，所以$\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=$

$\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{\frac{a_1+a_{21}}{2}\times 21}{\frac{b_1+b_{21}}{2}\times 21}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{5\times 21+2}{21+3}=\frac{107}{24}$.故选 A.

(2)**解**:(方法一)设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意,得$\begin{cases}10a_1+\frac{1}{2}\times 10\times 9\times d=310,\\ 20a_1+\frac{1}{2}\times 20\times 19\times d=1\ 220,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=4,\\ d=6.\end{cases}$

所以 $S_{30}=30\times 4+\frac{1}{2}\times 30\times 29\times 6=2\ 730$.

(方法二)因为数列$\{a_n\}$为等差数列,

所以 S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$也成等差数列.

所以 $2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$,

即 $2\times(1\ 220-310)=310+S_{30}-1\ 220$,

所以 $S_{30}=2\ 730$.

(方法三)设 $S_n=An^2+Bn(A,B$ 为常数).

由题意,得$\begin{cases}310=100A+10B,\\ 1\ 220=400A+20B,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=3,\\ B=1.\end{cases}$

所以 $S_n=3n^2+n$.

所以 $S_{30}=3\times 900+30=2\ 730$.

(方法四)设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

得$\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$,

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以 a_1 为首项,$\frac{d}{2}$为公差的等差数列.

所以$\frac{S_{10}}{10}$,$\frac{S_{20}}{20}$,$\frac{S_{30}}{30}$成等差数列.

所以$\frac{S_{10}}{10}+\frac{S_{30}}{30}=2\times\frac{S_{20}}{20}$.

所以 $S_{30}=30\times\left(\frac{S_{20}}{10}-\frac{S_{10}}{10}\right)=30\times(122-31)=2\ 730$.

[一题多思]

思考 1.D **解析**:依题意$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{2b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{b_1+b_7}=2\cdot\frac{\frac{a_1+a_{14}}{2}\times 14}{\frac{b_1+b_7}{2}\times 7}\times\frac{7}{14}=\frac{S_{14}}{T_7}$.

又因为$\frac{S_{2n}}{T_n}=\frac{6n}{3n+4}$,

所以$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=\frac{S_{14}}{T_7}=\frac{6\times 7}{3\times 7+4}=\frac{42}{25}$.

思考 2.$\frac{19}{4}$ **解析**:$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$,可设 $S_n=kn(5n+2)$,$T_n=kn(n+3)$,$k\neq 0$,则$\frac{a_6}{b_5}=\frac{S_6-S_5}{T_5-T_4}=\frac{6k(30+2)-5k(25+2)}{5k(5+3)-4k(4+3)}=\frac{19}{4}$.

【应用迁移】

1.225 **解析**:由题意,得 $S_n=25$,$S_{2n}-S_n=75$.而 S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列,所以 $S_{3n}-S_{2n}=125$.

所以 $S_{3n}=100+125=225$.

2.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为 $S_7=7$,$a_1=-2$,

所以 $7=7\times(-2)+\frac{7\times 6}{2}d$,解得 $d=1$.

所以 $a_n=-2+(n-1)\times 1=n-3$.

(2)因为$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n-5}{2}$,所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$.

又$\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=-2$,

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$-2$,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

所以 $T_n=n\times(-2)+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

第 2 课时　等差数列前 n 项和的应用

问题式预习

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×

2.0　-10　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_2=a_1+d=-3$,$S_5=5a_1+10d=-10$,即 $a_1+2d=-2$,解得 $a_1=-4$,$d=1$,所以 $a_5=a_1+4d=0$,$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n^2-9n}{2}$.当 $n=4$ 或 $n=5$ 时,S_n最小,最小值为-10.

3.(1)**提示**:因为 $a_7+a_8+a_9=3a_8>0$,$a_7+a_{10}=a_8+a_9<0$,所以 $a_8>0$,$a_9<0$,所以当 $n=8$ 时,数列$\{a_n\}$的前 n 项和最大.

(2)**提示**:$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,所以 S_n 可以看成是二次函数 $f(x)=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$ $(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　**解**:设等差数列$\{a_n\}$共有$(2m+1)$项,则奇数项有$(m+1)$项,偶数项有 m 项,中间项是第$(m+1)$项,即 a_{m+1},所以$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{\frac{1}{2}(m+1)(a_1+a_{2m+1})}{\frac{1}{2}m(a_2+a_{2m})}=\frac{m+1}{m}=\frac{44}{33}=\frac{4}{3}$,解得 $m=3$.

因为 $S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=44$,

所以 $a_{m+1}=11$.

所以这个数列的中间项为 11,共有 $2m+1=7$(项).

[一题多思]

思考 1.提示：两式相减得 $S_{奇}-S_{偶}=a_1+\underbrace{d+\cdots+d}_{n个}=a_1+nd=a_{n+1}$.

思考 2.解：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $50d=33-44$，解得 $d=-\frac{11}{50}$.

【应用迁移】

解：设等差数列$\{a_n\}$的项数为 $2m+1$，公差为 d，则数列的中间项为 a_{m+1}，奇数项有$(m+1)$项，偶数项有 m 项.

依题意，有 $S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=216$①，

$S_{偶}=ma_{m+1}=192$②.

①÷②，得$\frac{m+1}{m}=\frac{216}{192}$，解得 $m=8$.

所以数列$\{a_n\}$共有 $2m+1=17$(项).

把 $m=8$ 代入②，得 $a_9=24$.

又因为 $a_1+a_{17}=2a_9$，

所以末项为 $a_{17}=2a_9-a_1=47$，

公差 $d=\frac{a_{17}-a_9}{17-9}=\frac{23}{8}$，

故 $a_n=1+(n-1)\times\frac{23}{8}=\frac{23}{8}n-\frac{15}{8}$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{23}{8}n-\frac{15}{8}(n\leqslant 17,n\in\mathbf{N}^*)$.

任务 2

【探究活动】

例 2 **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 $a_4=-2,S_{10}=25$，得$\begin{cases}a_1+3d=-2,\\10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-11,\\d=3,\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-14$.

(2)(方法一)由 $d=3$ 知$\{a_n\}$是递增数列，

当 $n\leqslant 4$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant 5$ 时，$a_n>0$.

所以 $S_1>S_2>S_3>S_4$，且 $S_4<S_5<\cdots$，

所以当 $n=4$ 时，S_n 最小，最小值为 $S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=-26$.

(方法二)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{3}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{3}{2}\left(n-\frac{25}{6}\right)^2-\frac{625}{24}$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=4$ 时，S_n 最小，最小值为 -26.

【应用迁移】

1.A **解析**：(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_1=29,S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$，解得 $d=-2$.

所以 $S_n=29n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$.所以当 $n=15$ 时，S_n取得最大值.故选 A.

(方法二)由方法一得 $d=-2$.

因为 $a_1=29>0$，

由$\begin{cases}a_n=29-2(n-1)\geqslant 0,\\a_{n+1}=29-2n\leqslant 0,\end{cases}$得$\begin{cases}n\leqslant 15\frac{1}{2},\\n\geqslant 14\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以当 $n=15$ 时，S_n有最大值，即数列$\{a_n\}$的前 15 项和最大.故选 A.

2.$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$ **解析**：由题意，当且仅当 $n=8$ 时，S_n取得最大值，

可得$\begin{cases}d<0,\\a_8>0,\\a_9<0,\end{cases}$即$\begin{cases}d<0,\\7+7d>0,\\7+8d<0,\end{cases}$解得$-1<d<-\frac{7}{8}$.

故 d 的取值范围为$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$.

任务 3

【探究活动】

例 3 (1)$\frac{2n}{n+1}$ **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意得$\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}\times 1=\frac{n(n+1)}{2}$.

故$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}$.

裂项可得$\frac{1}{S_k}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，

所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

(2)**解**：①设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由题意可得$\begin{cases}a_2=a_1+d=11,\\S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=40,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+d=11,\\2a_1+9d=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=13,\\d=-2.\end{cases}$

所以 $a_n=13-2(n-1)=15-2n$.

②由①可求得 $S_n=\frac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$.

令 $a_n=15-2n>0$，解得 $n<\frac{15}{2}$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 $n\leqslant 7$ 时，$a_n>0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=14n-n^2$；

当 $n\geqslant 8$ 时，$a_n<0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+\cdots+a_n)=S_7-(S_n-S_7)=2S_7-S_n=2(14\times 7-7^2)-(14n-n^2)=n^2-14n+98$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\leqslant 7,\\n^2-14n+98,n\geqslant 8.\end{cases}$

[一题多思]

思考 1.提示：易知当 $1\leqslant n\leqslant 10$ 时，$a_n<0$，

当 $n\geqslant 11$ 时，$a_n>0$.

所以 $T_n=\begin{cases}-S_n,1\leqslant n\leqslant 10,\\-S_{10}+(S_n-S_{10}),n\geqslant 11.\end{cases}$

思考 2.解：①当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-\frac{3}{2}\times 1^2+\frac{205}{2}\times 1=101$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)-\left[-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{205}{2}(n-1)\right]=-3n+104$.

因为 $a_1=101$ 也满足上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-3n+104$.

②由 $a_n=-3n+104\geqslant 0$，得 $n\leqslant\frac{104}{3}$.

即当 $n\leqslant 34$ 时，$a_n>0$；当 $n\geqslant 35$ 时，$a_n<0$.

当 $n\leqslant 34$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$.

当 $n\geqslant 35$ 时，

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{34}|+|a_{35}|+\cdots+|a_n|$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_{35}+a_{36}+\cdots+a_n)$

$=S_{34}-(S_n-S_{34})$

$=2S_{34}-S_n$

$=2\times\left(-\frac{3}{2}\times 34^2+\frac{205}{2}\times 34\right)-\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n,n\leqslant 34,\\\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502,n\geqslant 35.\end{cases}$

【应用迁移】

1.解：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$

$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$

$=(1-2)\times(1+2)+(3-4)\times(3+4)+\cdots+(99-100)\times(99+100)$

$=-(1+2+3+4+\cdots+99+100)$

$=-5\ 050$.

2.(1)证明：因为 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$，

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，$b_{n+1}-b_n=2$.

又因为 $b_1=\frac{1}{a_1}=1$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

(2)解：由(1)可得 $b_n=\frac{1}{a_n}=2n-1$，则 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，

所以 $a_na_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $S_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

第 1 课时 等比数列的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

第 2 项　前一项　同一个常数　公比　q　ab

知识点二

(1)a_1q^{n-1}　(2)a_mq^{n-m}　$\frac{a_n}{a_m}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×

(3)×　**提示**：第 2 项与第 1 项的比是 $\frac{2}{3}$，从第 3 项开始每一项与前一项的比都是 2，不符合等比数列的定义.

(4)×

2.C　**解析**：由题意知首项 $a_1=1$，公比 $q=\sqrt{2}$，$a_n=8\sqrt{2}=(\sqrt{2})^7$，故 $n-1=7$，即 $n=8$.故选 C.

3.(1)**提示**：有.非零常数列既是等差数列又是等比数列.

(2)**提示**：不可以.等比数列的公比可以是正数、负数，但不能为零.

(3)**提示**：不一定.当 $a_1=0$ 时，按所给递推关系式，该数列为常数列，且常数为 0，此时 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

(4)**提示**：不正确.设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则可得 $q^4=\frac{a_5}{a_1}=4$，解得 $q^2=2$，所以 $a_3=a_1q^2=2\times 2=4$.

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d\neq 0$.

因为 a_3,a_7,a_m 是公比为 2 的等比数列，

所以 $\frac{a_1+6d}{a_1+2d}=2$①，

$\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+6d}=2$②.

由①得 $a_1=2d$，代入②，解得 $m=15$.

故选 C.

2.A　**解析**：当公比为 2 时，等比数列可为 1，2，4 或 2，4，8；当公比为 3 时，等比数列可为 1，3，9；当公比为 $\frac{3}{2}$ 时，

等比数列可为 4,6,9.同时,以上数列反向排列也是等比数列.综上,共 8 个等比数列.故选 A.

3.D　**解析**:当 $m=0,q=1$ 时,A,C 均不是等比数列;$\frac{6^2}{4^2}\neq\frac{4^2}{2^2}$,所以 B 不是等比数列.故选 D.

4.②③⑤　**解析**:①中 $\frac{\frac{1}{3}}{1}\neq\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$,故不是等比数列;②是等比数列,公比为 1;③是等比数列,公比为 $\frac{2}{3}$;④中有数 0,故不是等比数列;⑤是等比数列,公比为 -4.

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)D　**解析**:由 $\{a_n\}$ 是等比数列,得 $a_4a_6=a_2q^2a_2q^4=2^8$.又 $a_2=2$,所以 $2^2q^6=2^8$,即 $q^6=2^6$,所以 $q=\pm2$.故选 D.

(2)A　**解析**:因为 $-1,a,b,c,-9$ 成等比数列,

所以 $-1,a,b$ 成等比数列,a,b,c 成等比数列,$b,c,-9$ 成等比数列.

所以 $a^2=-b,b^2=ac,c^2=-9b$.

所以 $b^4=a^2c^2=(-1)\times(-9)b^2$,所以 $b^2=9$.

又 $a^2=-b>0$,所以 $b<0$.所以 $b=-3$.故选 A.

(3)**解**:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

①根据题意,可知 $\begin{cases}a_2=a_1q=4,\\a_5=a_1q^4=-\frac{1}{2},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\a_1=-8.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-2)^{4-n}$.

②因为 $a_3+a_6=(a_2+a_5)q$,

即 $9=18q$,所以 $q=\frac{1}{2}$.

由 $a_1q+a_1q^4=18$,得 $a_1=32$.

由 $a_n=a_1q^{n-1}=1$,得 $n=6$.

【应用迁移】

1.解:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

(1)因为 $a_6=a_3q^3$,即 $243=9\cdot q^3$,

所以 $q^3=27$,所以 $q=3$.

所以 $a_5=a_6\times\frac{1}{3}=81$.

(2)因为 $a_n=a_1q^{n-1}$,

所以 $\frac{1}{3}=\frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

所以 $n=4$.

(3)(方法一)因为 $a_3+a_6=36,a_4+a_7=18$,

所以 $\begin{cases}a_1q^2+a_1q^5=36①,\\a_1q^3+a_1q^6=18②.\end{cases}$

②÷①得 $q=\frac{1}{2}$,代入①得 $a_1=128$.

而 $a_n=a_1q^{n-1}$,所以 $\frac{1}{2}=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $n=9$.

(方法二)$q=\frac{a_4+a_7}{a_3+a_6}=\frac{1}{2}$,

$a_3+a_6=a_3+a_3\cdot q^3=a_3(1+q^3)=36$,

所以 $a_3=\frac{36}{1+q^3}=32$.

因为 $a_n=a_3q^{n-3}$,

所以 $\frac{1}{2}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$,

所以 $n=9$.

2.解:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由已知得 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=168,\\a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168①,\\a_1q(1-q^3)=42②.\end{cases}$

②÷①得 $q(1-q)=\frac{1}{4}$,所以 $q=\frac{1}{2}$.

所以 $a_1=\frac{42}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=96$.

设 G 是 a_5,a_7 的等比中项,

则应有 $G^2=a_5a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2\cdot q^{10}$,

所以 $G^2=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$,

所以 $G=\pm3$.

所以 a_5,a_7 的等比中项是 ±3.

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**:设前三个数分别为 $\frac{a}{q},a,aq(a\neq0,q\neq0)$,则第四个数为 $2aq-a$.

由题意得 $\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=27,\\a+aq=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\q=2.\end{cases}$

所以这四个数分别为 $\frac{3}{2},3,6,9$.

[一题多思]

思考 1.提示:可设为 $a,aq,aq^2,aq^3(q\neq0)$.若四个正数成等比数列,可设为 $\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3(q\neq0)$.

思考 2.解:设这四个数分别为 $\frac{2a}{q}-a,\frac{a}{q},a,aq(a\neq0,q\neq0)$,由题意得 $\begin{cases}\frac{a^2}{q}=16,\\\left(\frac{2a}{q}-a\right)\cdot aq=-128,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=8,\\q=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-8,\\q=4\end{cases}$ $(q=-2$ 舍去$)$.

因此所求的四个数为 $-4,2,8,32$ 或 $4,-2,-8,-32$.

【应用迁移】

解:(方法一)设这四个数依次为 $a-d,a,a+d,\frac{(a+d)^2}{a}$ $(a\neq0,a+d\neq0)$,由条件得

$\begin{cases}a-d+\dfrac{(a+d)^2}{a}=16,\\ a+a+d=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ d=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=9,\\ d=-6.\end{cases}$

当 $a=4,d=4$ 时，所求的四个数分别为 0,4,8,16；

当 $a=9,d=-6$ 时，所求的四个数分别为 15,9,3,1.

故所求的四个数分别为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

（方法二）设这四个数依次为 $\dfrac{2a}{q}-a,\dfrac{a}{q},a,aq(a\neq0,q\neq0)$，

由条件得 $\begin{cases}\dfrac{2a}{q}-a+aq=16,\\ \dfrac{a}{q}+a=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=8,\\ q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\ q=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

当 $a=8,q=2$ 时，所求的四个数分别为 0,4,8,16；

当 $a=3,q=\dfrac{1}{3}$ 时，所求的四个数分别为 15,9,3,1.

故所求的四个数分别为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

第 2 课时　等比数列的性质及应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$a_p\cdot a_q$　(2)等比　(4)等差

知识点二

q　q^2

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.C　**解析**：因为 $2+8=3+7$，所以 $a_3a_7=a_2a_8=9$.故选 C.

3.(1)**提示**：等比数列的单调性与其首项 a_1 和公比 q 都有关系：

当 $q>1,a_1>0$ 或 $0<q<1,a_1<0$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列；

当 $q>1,a_1<0$ 或 $0<q<1,a_1>0$ 时，$\{a_n\}$ 是递减数列；

当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$ 是常数列；

当 $q<0$ 时，$\{a_n\}$ 是摆动数列.

(2)**提示**：不一定.例如等比数列 1,2,4,8,…中，$a_1\cdot a_3\neq a_4$.

(3)**提示**：不是.由于 $\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q\cdot q=q^2$，$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{a_na_{n+1}\}$ 是以 q^2 为公比的等比数列.

任务型课堂

任务 1

1.B　**解析**：因为 $a_5a_6=9$，所以 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=\log_3(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{10})=\log_3(a_5a_6)^5=\log_39^5=\log_33^{10}=10$.故选 B.

2.C　**解析**：由等比数列的性质得 $a_1a_{10}=a_4a_7$，故 $a_1a_3a_{10}=a_3a_4a_7=2a_4a_7$，得 $a_3=2$.由 $a_{12}=a_3q^9=54$，得 $q^9=27$，则 $q^3=3$，所以 $a_9=\dfrac{a_{12}}{q^3}=\dfrac{54}{3}=18$.故选 C.

3.解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_7a_{11}=a_4a_{14}=6,a_4+a_{14}=5$，

所以 $\begin{cases}a_4=2,\\ a_{14}=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=3,\\ a_{14}=2.\end{cases}$ 所以 $q^{10}=\dfrac{3}{2}$ 或 $q^{10}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\dfrac{a_{20}}{a_{10}}=q^{10}$，所以 $\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$ 的值为 $\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{2}{3}$.

任务 2

【探究活动】

例 1　**证明**：易知 $S_n\neq0$.因为 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+\dfrac{n+2}{n}S_n}{n+1}=\dfrac{\dfrac{2n+2}{n}S_n}{n+1}=2\times\dfrac{S_n}{n}$，所以 $\dfrac{\dfrac{S_{n+1}}{n+1}}{\dfrac{S_n}{n}}=2$.

又 $\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{a_1}{1}=1$，

所以数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

[一题多思]

思考 1.提示：先推出 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ 与 $\dfrac{S_n}{n}$ 的关系式.

将 $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$ 变为 $S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+2}{n}S_n$，

所以 $S_{n+1}=\dfrac{2n+2}{n}S_n=\dfrac{2(n+1)}{n}S_n$，则 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{S_n}{n}$.

思考 2.证明：由 $a_{n+1}=4a_n-3n+1$，得 $a_{n+1}-(n+1)=4(a_n-n),n\in\mathbf{N}^*$.

因为 $a_1-1=1\neq0$，所以 $a_n-n\neq0$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=4$，

所以数列 $\{a_n-n\}$ 是以 1 为首项，4 为公比的等比数列.

思考 3.解：因为 $a_{n+1}=2a_n+3$，

所以 $a_{n+1}+3=2a_n+6=2(a_n+3)$.

因为 $a_1=-2$，所以 $a_1+3=1$，所以 $a_n+3\neq0$.

所以 $\dfrac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$，

所以 $\{a_n+3\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n+3=1\times2^{n-1}$，所以 $a_n=2^{n-1}-3$.

【应用迁移】

(1)**证明**：因为 $S_n=2(a_n-1)$①，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)$②.

①－②，得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$③.

又当 $n=1$ 时，$a_1=2(a_1-1)$，即 $a_1=2\neq0$，所以 $a_n\neq0$.由③可得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$，

则数列 $\{a_n\}$ 为以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

(2)**解**：由(1)知 $a_n=2^n$.

任务 3

【探究活动】

例 2　(1)D　**解析**：由题意可得一个细菌 10 min 后变成 $2^1=2$ 个，20 min 后共有 $2^2=4$ 个……从而得到 $10n$ min 后共有 2^n 个，所以经过 50 min，此细菌可由一个分裂成 $2^5=32$ 个.故选 D.

(2)**解**：①设鱼原来的产量为 a，n 年后鱼的产量为

a_n，则

$a_1=a\times(1+2)=3a$，

$a_2=3a\times(1+1)=6a$，

$a_3=6a\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=9a$，

$a_4=9a\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{4}a$，

$a_5=\frac{45}{4}a\times\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{405}{32}a$.

所以，五年后鱼的产量是原来的$\frac{405}{32}$倍，即$12\frac{21}{32}$倍.

②设n年后鱼的实际产量为b_n，则

$b_{n+1}=b_n\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{9}{10}$.

由$b_n>b_{n+1}$，得$1>\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{9}{10}$.

即$2^{n-1}>9$，解得$n\geqslant5$.

因此，从第五年开始，鱼的产量开始减少.

【应用迁移】

解：设这种物质最初的质量是1，经过n年，剩余质量是a_n.由条件可得，数列$\{a_n\}$是一个等比数列，其中$a_1=0.84$，$q=0.84$.设$a_n=0.5$，则$0.84^n=0.5$，两边取常用对数，得$n=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.84}\approx4$.

故这种物质的半衰期大约为4年.

任务4

【探究活动】

例3 **解**：(1)因为$\{a_n\}$是等差数列，

所以$a_2=a_1+d$，$a_4=a_1+3d$，$a_8=a_1+7d$.

因为a_4是a_2和a_8的等比中项，

所以$a_4^2=a_2\cdot a_8$，所以$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$.

又$d\neq0$，化简得$d=a_1=1$，所以$a_n=n$.

由$S_m=\frac{m(m+1)}{2}=66$，解得$m=11$(负值已舍去).

(2)因为a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}成等比数列，

所以该数列的公比$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2$，所以$a_{k_n}=1\times2^{(n+2)-1}=2^{n+1}$.

又因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_{k_n}=2^{n+1}=k_n$，

所以$k_n=2^{n+1}$.

【应用迁移】

1.解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

由$a_3a_5=a_4=a_4^2$，得$a_4=1$.

因为a_2，$3a_4$，a_3成等差数列，

所以$a_2+a_3=6a_4$，

则$6q^2-q-1=0$，

解得$q=\frac{1}{2}$(负值已舍去)，所以$a_1=8$.

所以$a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{4-n}$.

(2)$S_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2^{3+2+1+\cdots+(4-n)}=2^{\frac{(7-n)n}{2}}$.

因为$\frac{(7-n)n}{2}=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{8}$，

所以当$n=3$或$n=4$时，S_n取得最大值，此时最大值为$S_3=S_4=2^6=64$.

2.解：(1)由$a_{n+1}=2S_n+1$，

可得$a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2)$.

两式相减，得$a_{n+1}-a_n=2a_n$，即$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$.

又因为$a_2=2S_1+1=3$，所以$a_2=3a_1$.

故$\{a_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列，

所以$a_n=3^{n-1}$.

(2)设$\{b_n\}$的公差为d.

由$T_3=15$，得$b_1+b_2+b_3=15$，可得$b_2=5$，

故$b_1=5-d$，$b_3=5+d$.

又$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，

由题意可得$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$，

解得$d=2$或$d=-10$.

因为等差数列$\{b_n\}$的各项均为正数，

所以$d>0$.

所以$d=2$.所以$b_1=3$.

所以$T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+2n$.

4.3.2 等比数列的前n项和公式

第1课时 等比数列的前n项和

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ na_1

知识点二

(1)0 等比 (3)q

知识点四

乘积

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)√

2.AB **解析**：由题意可知$q\neq1$，且$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{2(1-q^3)}{1-q}=26$，所以$q^2+q-12=0$，解得$q=3$或$q=-4$.故选AB.

3.(1)**提示**：在应用公式求和时，应注意到$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$的使用条件为$q\neq1$，当$q=1$时应按常数列求和，即$S_n=na_1$.

(2)**提示**：根据等比数列的定义，有$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(q\neq1)$，则$\frac{a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}=q$，即$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$，所以$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

(3)**提示**：错位相减法一般适用于数列$\{a_n\cdot b_n\}$前n项和的求解，其中$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且等

比数列$\{b_n\}$的公比$q\neq1$.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 (1)C **解析**:由题意可知,数列$\{a_n\}$的公比$q\neq1$,得$\frac{S_4}{S_2}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=5$,$q^2=4$.因为$q>0$,所以$q=2$.故选 C.

(2)**解**:由等比数列的性质得$a_1a_n=a_2a_{n-1}=128$.

因为$\begin{cases}a_1+a_n=66,\\a_1a_n=128,\end{cases}$

所以a_1,a_n为方程$x^2-66x+128=0$的两根.

又方程的两根分别为 2,64,

所以$\begin{cases}a_1=64,\\a_n=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=2,\\a_n=64.\end{cases}$

当$a_1=64$,$a_n=2$时,

由$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=126$,得$q=\frac{1}{2}$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,得$2=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,得$n=6$.

当$a_1=2$,$a_n=64$时,由$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=126$,得$q=2$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,得$64=2\times2^{n-1}$,得$n=6$.

综上可知,$n=6$,$q=\frac{1}{2}$或$q=2$.

【应用迁移】

1.ABC **解析**:因为$a_1+a_4=18$,$a_2+a_3=12$,

所以$a_1(1+q^3)=18$,$a_1(q+q^2)=12$.

又公比q为整数,解得$a_1=q=2$.

所以$a_n=2^n$,$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

所以$S_8=2^9-2=510$.

因为$S_n+2=2^{n+1}$,所以数列$\{S_n+2\}$是公比为 2 的等比数列.

因为$\lg a_n=n\lg2$,所以数列$\{\lg a_n\}$是公差为$\lg2$的等差数列.

综上可得,A,B,C 正确.故选 ABC.

2.16 **解析**:因为$S_5=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{33}{32}a_1=11$,所以$a_1=16$.

3.**解**:设数列$\{a_n\}$的公比为q.

(1)因为$a_n=2^n=2\times2^{n-1}$,所以$a_1=2$,$q=2$.

所以$S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

(2)由题意,得$\begin{cases}a_1+a_1q^2=\frac{5}{4},\\a_1q^3+a_1q^5=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\q=2.\end{cases}$

从而$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}\times(1-2^5)}{1-2}=\frac{31}{4}$.

(3)(方法一)由$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,$a_n=a_1q^{n-1}$及已知条件,得$\begin{cases}189=\frac{a_1(1-2^n)}{1-2},\\96=a_1\cdot2^{n-1},\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\n=6.\end{cases}$

(方法二)由公式$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$及已知条件,

得$189=\frac{a_1-96\times2}{1-2}$,解得$a_1=3$.

又由$a_n=a_1q^{n-1}$,得$96=3\times2^{n-1}$,解得$n=6$.

任务 2

【探究活动】

例 2 (1)A **解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$\{a_n\}$为等比数列,

所以S_2,S_4-S_2,S_6-S_4也为等比数列,

即 7,S_4-7,$91-S_4$成等比数列.

由$(S_4-7)^2=7\times(91-S_4)$,得$S_4=28$或$S_4=-21$.

又因为$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)>S_2$,

所以$S_4=28$.

(2)2 **解析**:根据题意得$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

所以$\begin{cases}S_{奇}=-80,\\S_{偶}=-160.\end{cases}$

所以$q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{-160}{-80}=2$.

[一题多思]

思考 1.**解**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$S_{2n}-S_n=q^nS_n$,所以$S_{10}-S_5=q^5S_5$,所以$6-2=2q^5$,所以$q^5=2$.所以$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=a_1q^{15}+a_2q^{15}+a_3q^{15}+a_4q^{15}+a_5q^{15}=q^{15}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=q^{15}S_5=2^3\times2=16$.

思考 2.**解**:$S_{20}=S_{10}+q^{10}S_{10}=10+2^{10}\times10=10\ 250$.

【应用迁移】

1.24 **解析**:设$A=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}$,

$B=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{79}$.

由$\frac{A}{B}=q=3$,得$B=\frac{1}{3}A$.

又$A+B=S_{80}=32$,所以$\frac{4}{3}A=32$,解得$A=24$.

所以$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=24$.

2.-2 **解析**:因为$S_n=2\times3^n+r$,

所以当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^n+r-(2\times3^{n-1}+r)=4\times3^{n-1}$.

当$n=1$时,$a_1=S_1=6+r$.

因为$\{a_n\}$为等比数列,所以$6+r=4$,解得$r=-2$.

任务 3

【探究活动】

例 3 (1)$(n-1)2^{n+1}+2$ **解析**:因为$a_n=n\cdot2^n$,

所以$S_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$①,

所以$2S_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$②,

①$-$②,得

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$

$=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$

$=(1-n)2^{n+1}-2$.

所以 $S_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

(2)**解**:设数列$\{(2n-1)a^{n-1}\}$的前 n 项和为 S_n.

当 $a=1$ 时,数列变成 1,3,5,7,…,$2n-1$,…,

则 $S_n=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$.

当 $a\neq1$ 时,有 $S_n=1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$①,

$aS_n=a+3a^2+5a^3+7a^4+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+(2n-1)a^n$②.

①−②,得 $S_n-aS_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$,

所以$(1-a)S_n=1-(2n-1)a^n+2(a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})=1-(2n-1)a^n+2\times\dfrac{a(1-a^{n-1})}{1-a}=1-(2n-1)a^n+\dfrac{2(a-a^n)}{1-a}$.

又 $1-a\neq0$,

所以 $S_n=\dfrac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\dfrac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

综上所述,$S_n=\begin{cases}n^2,a=1,\\ \dfrac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\dfrac{2(a-a^n)}{(1-a)^2},a\neq1.\end{cases}$

【应用迁移】

解:(1)根据题意知 $S_n=n^2$,

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=(n-1)^2$,

两式相减即得 $a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时,$a_1=1$,满足上式,所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)得 $b_n=2^na_n=(2n-1)\cdot2^n$,

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times2+3\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^n$,

$2T_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^{n+1}$,

两式相减可得$-T_n=1\times2+2\times2^2+\cdots+2\times2^n-(2n-1)\times2^{n+1}$,

所以$-T_n=1\times2+2\times\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times2^{n+1}=-6+(3-2n)\times2^{n+1}$,

故 $T_n=(2n-3)\times2^{n+1}+6$.

第 2 课时　等比数列前 n 项和的应用

问题式预习

【概念辨析】

1.(1)√　**提示**:等比数列前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q}(q\neq1)$.

(2)×　**提示**:需满足 a 不等于 0 且不等于 1.

(3)√　**提示**:$S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-2-n$.

2.$\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$　**解析**:由题意得 $S_{2\,024}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2\,023}+a_{2\,024})=4\times(3^0+3^2+3^4+\cdots+3^{2\,022})=4\times\dfrac{1\times(1-3^{2\,024})}{1-3^2}=\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$.

3.(1)**提示**:判断数列是否是等比数列,公比是多少,是否为 1,首项、项数是多少.

(2)**提示**:①倒序相加法:如果一个数列的前 n 项满足与首末两项“等距离”的两项之和等于首末两项之和,那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求.如等差数列前 n 项和公式就是用此方法推导的.

②裂项相消法:能把数列的通项拆成两项的差,正负相消后剩下首尾若干项.

③错位相减法:如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的,那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求.如公比不为 1 的等比数列的前 n 项和公式就是用此法推导的.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　(1)73　(2)$\dfrac{8^n-1}{7}$　$1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$　**解析**:设第 n 个图形共挖掉 a_n 个正方形,则 $a_1=1$,$a_2-a_1=8$,$a_3-a_2=8^2$,…,$a_n-a_{n-1}=8^{n-1}$,所以 $a_n=1+8+8^2+\cdots+8^{n-1}=\dfrac{8^n-1}{7}$.故图③中共挖掉了$\dfrac{8^3-1}{7}=73$ 个正方形;

(2)第 n 个图形共挖掉了$\dfrac{8^n-1}{7}$个正方形.由于原正方形的边长为 1,则这些被挖掉的正方形的面积之和为

$1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+8\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4+8^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^6+\cdots+8^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}=\dfrac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{8}{9}}=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

[一题多思]

思考.提示:由本例解法,设被挖掉的正方形面积之和为 S_n,则 $S_n=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.由于一直继续下去,即 n 无限增大时,$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ 无限趋近于 0,此时被挖掉的正方形面积之和趋近于 1.

【应用迁移】

1.C　**解析**:根据题意,第一个正方形的边长为 1,其面积为 1,再将这个正方形的各相邻边的中点相连得到第二个正方形,依此类推每一个小正方形的面积都是前边正方形的面积的$\dfrac{1}{2}$,这些正方形的面积组成以 1 为首项,$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列,则这 8 个正方形的面积和 $S_8=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{255}{128}$.故选 C.

2.B　解析：设第 n 个正三角形的内切圆的面积为 a_n，从第二个正三角形开始每一个正三角形的边长是前一个正三角形边长的 $\frac{1}{2}$，则每一个正三角形的内切圆的半径也是前一个正三角形内切圆半径的 $\frac{1}{2}$，其面积为前一个正三角形内切圆面积的 $\frac{1}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q=\frac{1}{4}$ 的等比数列.第一个正三角形的边长为 3，其内切圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，其面积 $a_1=\pi r^2=\frac{3\pi}{4}$，

则前 n 个内切圆的面积和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{3\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\pi$.故选 B.

任务 2

【探究活动】

例 2　解：设从 2020 年年初到 2030 年年初每年存入 a 元的本利和组成数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 10)$，

则 $a_1=a(1+p)^{10}$，$a_2=a(1+p)^9$，…，$a_{10}=a(1+p)$，故数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 10)$ 是以 $a_1=a(1+p)^{10}$ 为首项，$q=\frac{1}{1+p}$ 为公比的等比数列.

所以 2030 年初这个家庭应取出的钱数为

$$S_{10}=\frac{a(1+p)^{10}\left[1-\frac{1}{(1+p)^{10}}\right]}{1-\frac{1}{1+p}}=\frac{a}{p}[(1+p)^{11}-(1+p)](元).$$

［一题多思］

思考 1.解：$a_1=a(1+10p)$，$a_2=a(1+9p)$，$a_3=a(1+8p)$，…，$a_{10}=a(1+p)$，

$S_{10}=a(1+10p)+a(1+9p)+\cdots+a(1+p)=10a+\left(10\times1+\frac{10\times9}{2}\right)ap=10a+55ap$.

思考 2.解：要将复利改为单利由“思考 1”知结果为 $10a+55ap$.

由存款利息按 20%纳税，则最后结果为 $10a+55ap\times(1-20\%)=10a+44ap$.

【应用迁移】

解：(1)每年投入电力型公交车的数量可构成等比数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=128$，$q=\frac{3}{2}$.

所以 2029 年应投入电力型公交车的数量为 $a_7=a_1q^6=128\times\left(\frac{3}{2}\right)^6=1\ 458$(辆).

(2)设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=\frac{128\cdot\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}}=256\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$.

由 $S_n>(10\ 000+S_n)\times\frac{1}{3}$，得 $S_n>5\ 000$，即 $256\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]>5\ 000$，解得 $n>\frac{\lg 5\ 256-\lg 256}{\lg 3-\lg 2}\approx7.45$.

所以该市到 2030 年年底电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的 $\frac{1}{3}$.

任务 3

【探究活动】

例 3　(1)**证明**：由题意可知，$a_1=5\times1.5-1.5=6$，$a_2=6\times1.5-1.5=7.5$，$a_3=7.5\times1.5-1.5=9.75$.

因为 $a_{n+1}=1.5a_n-1.5$，所以 $a_{n+1}-3=1.5(a_n-3)$.

又因为 $a_1-3=3$，所以 $\{a_n-3\}$ 是首项为 3，公比为 1.5 的等比数列.

(2)**解**：由(1)知，$a_n-3=3\times1.5^{n-1}$，所以 $a_n=3+3\times1.5^{n-1}$.

令 $3+3\times1.5^{n-1}>21$，解得 $n-1>\frac{\lg 6}{\lg 1.5}=\frac{\lg 3+\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx4.42$，所以 $n>5.42$，

所以至少到 2026 年的年底，企业的剩余资金会超过 21 千万元.

【应用迁移】

A　**解析**：设该合作社在 2024 年，2025 年，…，2033 年的销售额分别为 a_1，a_2，…，a_{10}.由题意，可得 $a_{n+1}=1.4a_n-4(n=1,2,\cdots,9)$，则 $a_{n+1}-10=1.4(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$.又因为 $a_1-10=90$，所以数列 $\{a_n-10\}$ 是首项为 90，公比为 1.4 的等比数列，则 $a_n-10=90\times1.4^{n-1}$，即 $a_n=90\times1.4^{n-1}+10$.所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\frac{90\times(1-1.4^{10})}{1-1.4}\approx100+225\times(28.93-1)\approx6\ 384$，故从 2024 年到 2033 年该产品的销售总额约为 6 384 万元.故选 A.

4.4* 数学归纳法

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(2)$n=k+1$　数学归纳法

知识点二

$n=n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$　$n=k+1$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.B

3.(1)**提示**：用数学归纳法证明时，第一步中，n 的初始值 n_0 应根据命题的具体情况来确定，不一定是 1.如：用数学归纳法证明凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°$ 时，其初始值 $n_0=3$.

(2)**提示**：$k\geqslant1$，$k\in\mathbf{N}^*$.数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法，所以 k 是正整数.又因为第一步是递推的基础，所以 k 大于等于 1.

(3)**提示**：第一步是验证命题递推的基础，第二步是论证命题递推的依据，这两个步骤缺一不可，只完成第一步而缺少第二步就作出判断，可能得出不正确的结论.因为单靠第一步，无法递推下去，即我们无法判定 n 取 n_0 以后的

数时命题是否正确.同样只有第二步而缺少第一步,也可能得出不正确的结论,缺少第一步这个基础,假设就失去了成立的前提,第二步也就没有意义了.

任务型课堂

任务 1

1.C　解析:用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$,第一步先验证当 $n=2$ 时,不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ 是否成立.故选 C.

2.D　解析:由题意,当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^k}$,当 $n=k+1$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k\times2}=\frac{1}{2^k+2^k}$,所以由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,增加的项为 $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$,增加了 2^k 项.故选 D.

任务 2

【探究活动】

例 1　证明:(1)①当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=2\times(2-3)+3=1$,左边 $=$ 右边,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}=2^k(2k-3)+3$,

则当 $n=k+1$ 时,$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}+(2k+1)\times2^k=2^k(2k-3)+3+(2k+1)\times2^k=2^k(4k-2)+3=2^{k+1}[2(k+1)-3]+3$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由①②可知,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

(2)①当 $n=1$ 时,左边 $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

右边 $=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,

即 $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2}{k+2}$,

则当 $n=k+1$ 时,

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\times\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2}{k+2}\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}=\frac{2}{k+3}=\frac{2}{(k+1)+2}$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由①②可知,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【应用迁移】

1.证明:当 $n=1$ 时,左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,右边 $=\frac{1}{2}$,所以当 $n=1$ 时等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$.

即等式在 $n=k+1$ 时也成立.

综上所述,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2.解:(1)猜想 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

证明:当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=1$,等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3$

$=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}$

$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

综上所述,对任意的正整数 n,$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

(2)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=n^3+n$,

所以 $S_{10}=(1^3+2^3+\cdots+10^3)+(1+2+\cdots+10)$

$=(1+2+\cdots+10)^2+\frac{10\times11}{2}$

$=55^2+55=3\,080$.

任务 3

【探究活动】

例 2　证明:(1)当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=\frac{1}{2}$,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}>\frac{k}{2}$,

则当 $n=k+1$ 时,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{k}{2}+(2^k-2^{k-1})\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k+1}{2}$.

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由(1)(2)可知,不等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

[一题多思]

思考 1.提示:必须要用到归纳假设,即当 $n=k$ 时,不等式成立.

关键点是对不等式进行适当放缩.

思考 2.证明:(1)当 $n=1$ 时,左边 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1=$ 右边,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}<\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+(k+1)$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由(1)(2)可知,不等式对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【应用迁移】

1.D　**解析**:用数学归纳法证明不等式没有应用归纳假设,所以从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确.

2.证明:(1)由 $a_1=2$,$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$,

可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$,即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$,

又 $\frac{a_1}{1}=2$,

则数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 2,公差为 1 的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{n}=2+n-1=n+1$.

故 $a_n=n(n+1)$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}=\frac{2}{n(n+1)^2}$.

①当 $n=1$ 时,左边 $=b_1=\frac{1}{2}$,右边 $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$,不等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,

即 $b_1+b_2+\cdots+b_k<1-\frac{1}{(k+1)^2}$.

当 $n=k+1$ 时,$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}<1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}=1-\frac{k^2+2k+2}{(k+1)^2(k+2)^2}<1-\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2}$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由①②可知,$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$ 对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

任务 4

【探究活动】

例 3　**证明**:(1)当 $n=1$ 时,$a^2+(a+1)^1=a^2+a+1$,显然能被 a^2+a+1 整除,命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,命题成立,

即 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 能被 a^2+a+1 整除.

当 $n=k+1$ 时,

$a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}-a(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1}$.

因为 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 与 a^2+a+1 都能被 a^2+a+1 整除,

所以上式能被 a^2+a+1 整除,

即当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)(2)知,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,$a\in\mathbf{R}$,命题都成立.

【应用迁移】

证明:(1)当 $n=1$ 时,$2^{3\times1}-1=8-1=7$,能被 7 整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$2^{3k}-1$ 能被 7 整除.

那么当 $n=k+1$ 时,$2^{3(k+1)}-1=8\times2^{3k}-1=8\times2^{3k}-8+7=8(2^{3k}-1)+7$.

因为 $2^{3k}-1$ 能被 7 整除,

所以 $8(2^{3k}-1)+7$ 能被 7 整除,

即当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)(2)可知,$2^{3n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 7 整除.

微专题培优(二)　数列求和问题

类型 1

例 1　(1)C　**解析**:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则由题意,得 $\begin{cases}S_7=7a_1+21d=14,\\S_9=9a_1+36d=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=11,\\d=-3,\end{cases}$ 所以 $S_{10}=10a_1+45d=110-135=-25$.故选 C.

(2)D　**解析**:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则 $a_1q-2a_1=0$,所以 $q=2$.因为 $S_2-S_1=a_1(1+q)-a_1=a_1q=4$,所以 $a_1=2$,所以 $S_{2\,025}=2\times\frac{1-2^{2\,025}}{1-2}=2\times(2^{2\,025}-1)=2^{2\,026}-2$.故选 D.

【对点训练】

1.A　**解析**:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由 $a_1=\frac{1}{3}$,$a_2+a_5=4$,得 $\frac{1}{3}+d+\frac{1}{3}+4d=4$,解得 $d=\frac{2}{3}$,所以 $a_1+a_5=2a_1+4d=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$,所以 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{25}{3}$.故选 A.

2.C　**解析**:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.当 $q=1$ 时,$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2\neq\frac{33}{32}$,不满足要求,舍去;当 $q\neq1$ 时,$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,所以 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=\frac{33}{32}$,所以 $q^5=\frac{1}{32}$,解得 $q=\frac{1}{2}$.所以 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1q^4}{a_1q^2}=q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.故选 C.

类型 2

例 2　**解**:(1)由于 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$,所以 $a_2=1+d$,$a_4=1+3d$.

等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=b_1q^{n-1}=q^{n-1}$，故$b_2=q$，$b_3=q^2$.

根据题意列方程组$\begin{cases}1+d=q,\\1+3d=q^2,\end{cases}$得$1+3(q-1)=q^2$，即$q^2-3q+2=0$，

解得$q=1$(舍去，因为已知$q\neq1$)或$q=2$，故$d=1$.

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$，等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(2)根据题意得$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，

由(1)得$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(1+n)n}{2}$，$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

故$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+2^n-1$.

【对点训练】

1.B　**解析**：因为$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=3$，所以$S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8+a_9)+\cdots+(a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024}+a_{2\,025})$

$=1+506\times3=1\,519$.故选B.

2.B　**解析**：因为$a_n=\begin{cases}2n-1,n\text{为奇数},\\2^n,n\text{为偶数},\end{cases}$所以$S_{10}=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=\dfrac{5\times(1+17)}{2}+\dfrac{4\times(1-4^5)}{1-4}=1\,409$.故选B.

类型3

例3　**解**：(1)由条件可知$\begin{cases}a_1+2d=5,\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d),\end{cases}$且$d\neq0$，解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$.

(2)由(1)得$b_n=\dfrac{1}{a_n^2+4n-2}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以$S_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

【对点训练】

解：(1)由题意可得$S_n=n^2+2n$，当$n=1$时，$a_1=S_1=3$；

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-(n-1)^2-2(n-1)=2n+1$.

因为$a_1=3$满足上式，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$.

(2)因为$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$，且$b_1=3=a_1$，

所以当$n\geqslant2$时，$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n=n^2+2n$.

当$n=1$时，$b_1=3$也符合上式，所以$b_n=n^2+2n$.

所以$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

所以$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

类型4

例4　**解**：(1)当$n=1$时，$4S_1=4a_1=3a_1+4$，解得$a_1=4$.

当$n\geqslant2$时，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，所以$4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$，即$a_n=-3a_{n-1}$.

而$a_1=4\neq0$，则$a_n\neq0$，所以$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-3$，

所以数列$\{a_n\}$是以4为首项，-3为公比的等比数列，

所以$a_n=4\times(-3)^{n-1}$.

(2)因为$b_n=(-1)^{n-1}n\times4\times(-3)^{n-1}=4n\cdot3^{n-1}$，

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4\times3^0+8\times3^1+12\times3^2+\cdots+4n\times3^{n-1}$，

故$3T_n=4\times3^1+8\times3^2+12\times3^3+\cdots+4n\times3^n$.

两式相减得$-2T_n=4+4\times3^1+4\times3^2+\cdots+4\times3^{n-1}-4n\times3^n$

$=4+4\times\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\times3^n$

$=4+2\times3\times(3^{n-1}-1)-4n\cdot3^n$

$=(2-4n)\cdot3^n-2$，

所以$T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$.

【对点训练】

解：(1)已知$(n-1)a_{n+1}=na_n+4$，当$n=1$时，解得$a_1=-4$.

当$n\geqslant2$时，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n-1}+\dfrac{4}{n(n-1)}=\dfrac{a_n}{n-1}+\dfrac{4}{n-1}-\dfrac{4}{n}$，即$\dfrac{a_{n+1}+4}{n}=\dfrac{a_n+4}{n-1}$，

所以数列$\left\{\dfrac{a_n+4}{n-1}\right\}$为常数数列，且$\dfrac{a_n+4}{n-1}=a_2+4=2$，得到$a_n=2n-6$.

又当$n=1$时，$a_1=-4=2\times1-6$，所以$a_n=2n-6$对$n=1$也成立，

故可得$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-6$.

(2)设$b_n=2^na_n=(2n-6)\cdot2^n=(n-3)\cdot2^{n+1}$，

设数列$\{b_n\}$的前n项和为B_n，则$B_n=-2\cdot2^2-1\cdot2^3-0\cdot2^4+\cdots+(n-3)\cdot2^{n+1}$，

$2B_n=-2\cdot2^3-1\cdot2^4-\cdots+(n-4)\cdot2^{n+1}+(n-3)\cdot2^{n+2}$，

两式相减得到$-B_n=-8+(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(n-3)\cdot2^{n+2}=-8+\dfrac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-(n-3)\cdot2^{n+2}=(4-n)\cdot2^{n+2}-16$.

所以$B_n=(n-4)\cdot2^{n+2}+16$.

类型 5

例 5 C **解析**：由题意可知，当 n 为偶数时，$a_n+a_{n+1}=(-1)^n=1$，因此，数列 $\{a_n\}$ 的前 2 025 项和为 $S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\,024}+a_{2\,025})=2+1\times 1\,012=1\,014$.故选 C.

【对点训练】

1.A **解析**：在数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_n=(-1)^n\cdot n$，得 $a_{2n-1}+a_{2n}=-(2n-1)+2n=1$，所以 $S_{985}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{983}+a_{984})+a_{985}=1\times 492-985=-493$.故选 A.

2.D **解析**：因为 $d=1$，$a_1=1$，所以 $a_n=1+n-1=n$，此时令 $b_n=(-1)^{n+1}a_n=(-1)^{n+1}n$.所以 $\{b_n\}$ 前 2 025 项和为 $1-2+3-4+\cdots-2\,024+2\,025=(1-2)+(3-4)+\cdots+(2\,023-2\,024)+2\,025=1\,012\times(-1)+2\,025=1\,013$.故选 D.

迁移应用

类型一

例 1 (1)**解**：当 $n=1$ 时，由 $2S_1=a_1^2+a_1$，得 $a_1(a_1-1)=0$，又 $a_1>0$，得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，又 $2S_n=a_n^2+a_n$，作差得 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，又 $a_n+a_{n-1}>0$，则 $a_n-a_{n-1}=1$.

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，故数列的通项公式为 $a_n=n$.

(2) **证明**：由(1)可得 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2+a_{n+1}^2-1}=\dfrac{1}{n^2+(n+1)^2-1}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

又 $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$，所以 $T_n<\dfrac{1}{2}$.

【对点训练】

1.A **解析**：由题可知 $a_{n+1}>a_n$ 恒成立，即 $3^{n+1}+\lambda(-2)^{n+2}>3^n+\lambda(-2)^{n+1}$ 恒成立.当 n 为奇数时，$3^{n+1}-\lambda\cdot 2^{n+2}>3^n+\lambda\cdot 2^{n+1}$，$3\lambda<\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，因为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 的最小值是 $\dfrac{3}{2}$，所以 $3\lambda<\dfrac{3}{2}$，即 $\lambda<\dfrac{1}{2}$；当 n 为偶数时，$3^{n+1}+\lambda\cdot 2^{n+2}>3^n-\lambda\cdot 2^{n+1}$，$-3\lambda<\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，因为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 的最小值是 $\dfrac{9}{4}$，所以 $-3\lambda<\dfrac{9}{4}$，即 $\lambda>-\dfrac{3}{4}$.综上所述，$-\dfrac{3}{4}<\lambda<\dfrac{1}{2}$.故选 A.

2.D **解析**：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n}a_n=n^2+n$①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$②，

①－②得 $\dfrac{1}{n}a_n=2n$，故 $a_n=2n^2$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也满足上式.

故 $b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$，

则 $T_n=\dfrac{1}{4}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$.

$T_n<\dfrac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$，

即 $\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]<\dfrac{n}{n+1}\lambda$，整理得 $\lambda>\dfrac{n+2}{4n+4}$.

因为 $y=\dfrac{n+2}{4n+4}=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$ 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 时单调递减，

所以当 $n=1$ 时，$\left(\dfrac{n+2}{4n+4}\right)_{\max}=\dfrac{3}{8}$，

所以 $\lambda>\dfrac{3}{8}$，即实数 λ 的取值范围为 $\left(\dfrac{3}{8},+\infty\right)$.故选 D.

类型二

例 2 (1)A **解析**：由题意，知当 $n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时均有 $a_n=f\left(\dfrac{n}{3}\right)=\left[\dfrac{n}{3}\right]=k$，所以 $S_{3n}=0+0+\underbrace{1+1+1}_{3\text{个}}+\underbrace{2+2+2}_{3\text{个}}+\cdots+\underbrace{(n-1)+(n-1)+(n-1)}_{3\text{个}}+n=3\times\dfrac{1+n-1}{2}\times(n-1)+n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$.故选 A.

(2)A **解析**：函数 $y=f(x)$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，那么 $y=f(x-5)$ 的图象关于点 $(5,0)$ 中心对称.由等差中项的性质和图象对称性可知，$\dfrac{a_1-5+a_9-5}{2}=a_5-5$，故 $f(a_1-5)+f(a_9-5)=0$，所以 $f(a_2-5)+f(a_8-5)=f(a_3-5)+f(a_7-5)=f(a_4-5)+f(a_6-5)=2f(a_5-5)=0$.又 $g(x)=f(x-5)+x$，所以 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)=f(a_1-5)+f(a_2-5)+\cdots+f(a_9-5)+a_1+a_2+\cdots+a_9=45$，

即 $a_1+a_2+\cdots+a_9=45$.故选 A.

【对点训练】

1.D **解析**：由题意，知 $a_n=n^2-9n+\dfrac{k}{n}\geqslant\dfrac{k}{4}-20$，$n\in\mathbf{N}^*$，即 $(n-4)(n-5)\geqslant\dfrac{k(n-4)}{4n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$4n(n-5)\leqslant k$，将 1，2，3 分别代入求解，解得 $k\geqslant-16$；当 $n\geqslant 5$ 时，$4n(n-5)\geqslant k$，令 $f(x)=4x(x-5)$，显然 $f(x)$ 在定义域 $[5,+\infty)$ 内单调递增，解得 $k\leqslant 0$.综上，$-16\leqslant k\leqslant 0$.故选 D.

2.B **解析**：由题意得，$n(a_{n+1}-a_n)=a_n+1\Rightarrow na_{n+1}$

$=(n+1)a_n+1$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.由累加法可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}\right)+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{2}-a_1\right)+a_1$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right)+2=3-\frac{1}{n+1}<3$.对于任意的$a\in[-2,2]$，$n\in\mathbf{N}^*$，不等式$\frac{a_{n+1}}{n+1}<2t^2+at-1$恒成立，即$2t^2+at-1\geqslant 3\Rightarrow 2t^2+at-4\geqslant 0$.令$f(a)=2t^2+at-4=at+2t^2-4(a\in[-2,2])$，可得$f(2)\geqslant 0$且$f(-2)\geqslant 0$，即$\begin{cases}t^2+t-2\geqslant 0,\\ t^2-t-2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\geqslant 1\text{ 或 }t\leqslant -2,\\ t\geqslant 2\text{ 或 }t\leqslant -1,\end{cases}$可得$t\geqslant 2$或$t\leqslant -2$.故选 B.

第五章　一元函数的导数及其应用

5.1　导数的概念及其意义

5.1.1　变化率问题

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(2)某一时刻　瞬时速度　(3)正值　负值　0

知识点二

切线

【概念辨析】

1.(1)×　**提示**：瞬时速度是Δt趋近于 0 时的平均速度.

(2)√　**提示**：时间段长度相同，平均速度不断增大，图象越来越“陡”.

(3)√　**提示**：由平均速度的定义可知$\overline{v}=\frac{0.9\times 4-0.9\times 1}{1}=2.7(\text{m/s})$.

2.$y=4x-3$　**解析**：抛物线$f(x)$在点(1,1)处的切线斜率为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=4$，切线方程为$y=4x-3$.

3.(1)**提示**：$\overline{v}=\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{(1+\Delta t)-1}=10+5\Delta t$.

(2)**提示**：当Δt无限趋近于 0 时，$\overline{v}$无限趋近于 10，这时的 10 即为当$t=1$时物体的瞬时速度.

任务型课堂

任务 1

1.B　**解析**：由已知，得$\frac{s(3)-s(2)}{3-2}=26$，所以$(5\times 3^2+3m)-(5\times 2^2+2m)=26$，解得$m=1$.故选 B.

2.③　**解析**：在$[0,t_0]$内，甲、乙的平均速度都为$\frac{s_0}{t_0}$，故①②错误.

在$[t_0,t_1]$内，甲的平均速度为$\frac{s_2-s_0}{t_1-t_0}$，乙的平均速度为$\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$.

因为$s_2-s_0>s_1-s_0$，$t_1-t_0>0$，所以$\frac{s_2-s_0}{t_1-t_0}>\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$，故③正确，④错误.

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：因为$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$

$=\frac{(1+\Delta t)^2+(1+\Delta t)+1-(1^2+1+1)}{\Delta t}=3+\Delta t$，

所以$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3+\Delta t)=3$，

即物体在$t=1$时的瞬时速度为 3 m/s.

[一题多思]

思考 1.解：求物体的初速度，即求物体在$t=0$时的瞬时速度，

因为$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(0+\Delta t)-s(0)}{\Delta t}$

$=\frac{(0+\Delta t)^2+(0+\Delta t)+1-1}{\Delta t}=1+\Delta t$，

所以$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(1+\Delta t)=1$.

即物体的初速度为 1 m/s.

思考 2.解：设物体在t_0时刻的瞬时速度为 9 m/s.

又$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=2t_0+1+\Delta t$，

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t_0+1+\Delta t)=2t_0+1$，则$2t_0+1=9$，所以$t_0=4$.

则物体在$t=4$时的瞬时速度为 9 m/s.

【应用迁移】

解：(1)因为物体在[3,5]内的时间变化量为$\Delta t=5-3=2$，

物体在[3,5]内的位移变化量为$\Delta s=3\times 5^2+2-(3\times 3^2+2)=3\times(5^2-3^2)=48$，

所以物体在[3,5]内的平均速度为$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{48}{2}=24(\text{m/s})$.

(2)求物体的初速度v_0，即求物体在$t=0$时的瞬时速度.

因为物体在$t=0$附近的平均变化率为$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{29+3[(0+\Delta t)-3]^2-29-3(0-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-18$，

所以物体在$t=0$时的瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-$

18)=−18(m/s),即物体的初速度为−18 m/s.

(3)因为物体在 $t=1$ 附近的平均变化率为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{29+3[(1+\Delta t)-3]^2-29-3(1-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-12$,

所以物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-12)=-12(\text{m/s})$.

任务 3

【探究活动】

例 2 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　切线

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【应用迁移】

解:曲线 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在点(1,0)处的切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{1+\Delta x}\right)=2$.

故所求切线方程为 $y=2(x-1)$,

即 $2x-y-2=0$.

5.1.2　导数的概念及其几何意义

第 1 课时　导数的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

知识点二

可导　$f'(x_0)$　$y'|_{x=x_0}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【概念辨析】

1.(1)×　**提示**:函数 $f(x)=-2x^2+1$ 在区间[−1,1]上的平均变化率为零,但是此函数在区间[−1,1]上的函数值不都相等.

(2)√　(3)√

2.(1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{3}{4}$　**解析**:(1)函数 $y=f(x)$ 在区间[−1,1]上的平均变化率为 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由函数 $y=f(x)$ 的图象知,$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{2},-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1,1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 所以函数 $y=f(x)$ 在区间[0,2]上的平均变化率为 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

3.(1)**提示**:Δx,Δy 可正可负,Δy 也可以为零,但 Δx 不能为零.平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 可正,可负,可为零.

(2)**提示**:瞬时变化率的几何意义是曲线的切线斜率.

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**:函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间[8,27]上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(27)-f(8)}{27-8}=\frac{3-2}{19}=\frac{1}{19}$.故选 C.

2.$\frac{3}{4}$　**解析**:由题中函数 $f(x)$ 的图象,知函数 $f(x)$ 在区间[−1,3]上的平均变化率为 $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{4-1}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$.

3.$k_1>k_2$　**解析**:在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上,平均变化率 $k_1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}$;在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,平均变化率 $k_2=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$.所以 $k_1>k_2$.

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**:当 $x=2$ 时,

$\Delta y=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\frac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$,

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}$,

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}\right)=4+0-\frac{1}{4+2\times 0}=\frac{15}{4}$.

[一题多思]

思考　**解**:设函数在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 1.

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2+\frac{1}{x_0+\Delta x}+5-\left(x_0^2+\frac{1}{x_0}+5\right)$

$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}$,

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$,

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0-\frac{1}{x_0^2}$.

因为 $f'(x_0)=1$,

所以 $2x_0-\frac{1}{x_0^2}=1$,

所以 $2x_0^3-x_0^2-1=0$,

所以 $x_0^2(x_0-1)+(x_0-1)(x_0^2+x_0+1)=0$，

所以 $(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0$，解得 $x_0=1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 1.

【应用迁移】

1.解：因为 $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)-\frac{4}{2+\Delta x}-\left(2-\frac{4}{2}\right)=\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=1+\frac{2}{2+\Delta x}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{2}{2+\Delta x}\right)=2$，

从而 $f'(2)=2$.

2.解：(1)当自变量 x 由 1 变到 1.01 时，函数的平均变化率为 $\frac{f(1.01)-f(1)}{1.01-1}=\frac{(1.01^2+1.01)-(1^2+1)}{1.01-1}$

$=3.01$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+1+\Delta x-(1^2+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)\Delta x+\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3+\Delta x)=3$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)C **解析**：由 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2a$，得 $2\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2a$，所以 $2f'(x_0)=2a$，所以 $f'(x_0)=a$.故选 C.

(2)A **解析**：因为 $\Delta x\to 0$，所以 $-\Delta x\to 0$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=f'(1)$.故选 A.

【应用迁移】

1.B **解析**：由导数的定义，知 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.故选 B.

2.$c>a=d=e>b$ **解析**：$a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，

$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$，

$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$，

$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$，

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

因为 $f'(x_0)>0$，所以 $c>a=d=e>b$.

故答案为 $c>a=d=e>b$.

第 2 课时　导数的几何意义

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)一个确定的位置　切线

知识点二

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√

(3)×　**提示**：直线与曲线相切，则直线与曲线除了切点之外，可能还有其他公共点.

2.$y=2x-3$　**解析**：令 $y=f(x)=3x^2-4x$，则 $k=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)-(3\times 1^2-4\times 1)}{\Delta x}=2$.

所以切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $y=2x-3$.

3.(1)**提示**：由导数的几何意义以及直线倾斜角的正切值的符号与角度的关系知此说法正确.

(2)**提示**：易知图象在点 A，B 处的切线斜率大于零且 $k_A>k_B$，在点 C 处的切线斜率小于零，根据导数的几何意义，可得 $f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$.

任务型课堂

任务 1

1.BD　**解析**：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

又因为 $f(b)=g(b)$，$f(a)=g(a)$，

所以 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$，所以 A 错误，B 正确.

易知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.

同理，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=g(x)$ 在该点处的切线的斜率.

由题中图象可知，当 $x_0\in(a,b)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率有可能大于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，也有可能小于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，故 C 错误，D 正确.

2.D　**解析**：对于①，在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲小区分出量的增长量小于乙小区分出量的增长量，所以甲小区的分出量比乙小区增长得慢，说法①正确.对于②，在 $[t_2,t_3]$ 这段时间内，甲小区分出量的增长量小于乙小区分出量的增长量，所以乙小区的分出量比甲小区增长得快，说法②正确.对于③，在 t_2 时刻，乙图象切线的斜率比甲图象切线的斜率大，即乙小区的瞬时增长率比甲小区大，说法③正确.对于④，乙图象在 t_2 时刻的切线斜率比 t_3 时刻的切线

斜率更大，故乙小区在 t_2 时刻的分出量比 t_3 时刻增长得快，说法④正确.综上所述，①②③④都正确.故选 D.

任务 2

【探究活动】

例 1 解：$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$，

所以所求切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

所以，所求切线方程为 $y-4=2(x-1)$，即 $2x-y+2=0$.

［一题多思］

思考 1.解：设点 A 的坐标为 (x_0,y_0).

则抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 A 处的切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(x_0+\Delta x)^2+3]-(x_0^2+3)}{\Delta x}=2x_0$，

直线 $2x-6y+5=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，

由题设知 $2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$，解得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，

此时 $y_0=\dfrac{21}{4}$，

所以点 A 的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{21}{4}\right)$.

思考 2.解：令 $y=f(x)$，则抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$.

而 $f(1+\Delta x)-f(1)=-(1+\Delta x)^2+3-2=-(\Delta x)^2-2\Delta x$，

所以抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2)=-2$.

又 $f(1)=2$，

故抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

$y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

【应用迁移】

1. $\dfrac{8}{3}$ **解析**：因为切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=3$，所以曲线在点(1,1)处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $y=3x-2$.

它与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点为(2,4)，所以围成三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(2-\dfrac{2}{3}\right)\times 4=\dfrac{8}{3}$.

2.解：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，

设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)因为切线与直线 $y=6x-5$ 平行，

所以 $2x_0=6$，得 $x_0=3$，$y_0=9$，即 $P(3,9)$ 是满足条件的点.

(2)因为切线与直线 $x-3y+5=0$ 垂直，

所以 $2x_0\times\dfrac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，

即 $P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)因为切线的倾斜角为 135°，

所以切线的斜率为 -1，即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{1}{4}$，即 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

任务 3

【探究活动】

例 2 解：设切点为 $\left(x_0,\dfrac{1}{4}x_0^2\right)$，切线的斜率为 k.

因为 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}(x_0+\Delta x)^2-\frac{1}{4}x_0^2}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}x_0$，

所以 $k=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}x_0^2}{4-x_0}=\dfrac{1}{2}x_0$，

即 $x_0^2-8x_0+7=0$，解得 $x_0=7$ 或 $x_0=1$，

故 $k=\dfrac{1}{2}x_0=\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

所以所求切线方程为 $14x-4y-49=0$ 或 $2x-4y-1=0$.

［一题多思］

思考 1.提示：求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线时，点 $(x_0,f(x_0))$ 一定是切点，只要求出斜率 $f'(x_0)$，利用切点和所求斜率写出切线方程即可；而求曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0) 的切线时，给出的点 (x_0,y_0) 不一定在曲线上，即使在曲线上也不一定是切点.

思考 2.解：设切点为 $P(x_0,y_0)$.

由 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)\cdot x_0}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x_0^2}$，

得所求切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点(2,0)在切线上，

所以 $x_0^2y_0=2-x_0$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上，所以 $x_0y_0=1$.

联立可解得 $x_0=1$，$y_0=1$，

故所求切线方程为 $x+y-2=0$.

【应用迁移】

解：(1) 因为 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=3$，

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $y=3x-2$.

(2)设切点为 $Q(x_0,x_0^3)$，则切线的斜率为 $k=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=3x_0^2$，

所以切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$.

因为切线过点 $P\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，所以 $2x_0^2-2x_0^3=0$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$，

从而切线方程为 $y=0$ 或 $y=3x-2$.

5.2 导数的运算

5.2.1 基本初等函数的导数

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}$ 0　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}$ 1

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$ $2x$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]$ $3x^2$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)$ $-\dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

知识点二

(1)0　(2)$\alpha x^{\alpha-1}$　(3)$\cos x$　(4)$-\sin x$

(5)$a^x\ln a$　e^x　(6)$\dfrac{1}{x\ln a}$　$\dfrac{1}{x}$

【概念辨析】

1.(1)×　**提示**：$f'(x)=0$.

(2)√

(3)×　**提示**：$(2^x)'=2^x\ln 2$.

(4)√

2.BCD　**解析**：对于 A，$y'=0$，故 A 错误；对于 B，因为 $y'=-\dfrac{2}{x^3}$，所以 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$，故 B 正确；显然 C，D 正确. 故选 BCD.

3.(1)**提示**：说明常数函数 $f(x)=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0，即每一点处的切线都与 x 轴平行(或重合).

(2)**提示**：幂函数的导数，系数为原函数的次数，次数是原函数的次数减去 1. 指数函数的导数，系数为原函数底数的自然对数. 正弦函数的导数为余弦函数，余弦函数的导数为正弦函数的相反数.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　(1)CD　**解析**：$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)'=0$，A 错误；$(x^{\frac{5}{3}})'=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，B 错误；$(\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$，C 正确；$(2^x)'=2^x\ln 2$，D 正确. 故选 CD.

(2)①$y'=-\dfrac{4}{x^5}$　**解析**：$y'=\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'=-4x^{-5}=-\dfrac{4}{x^5}$.

②$y'=7^x\ln 7$　**解析**：$y'=(7^x)'=7^x\ln 7$.

③$y'=12x^{11}$　**解析**：$y'=(x^{12})'=12x^{11}$.

④$y'=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$　**解析**：$y'=(\sqrt[5]{x^3})'=(x^{\frac{3}{5}})'=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

【应用迁移】

解：(1)$y'=\left(\cos\dfrac{\pi}{10}\right)'=0$.

(2)$y'=(\log_5 x)'=\dfrac{1}{x\ln 5}$.

(3)$y'=[(x-1)(x^2+x+1)+1]'=(x^3-1+1)'=(x^3)'=3x^2$.

任务 2

【探究活动】

例 2　(1)B　**解析**：由题意，$f'(x)=-\sin x$，故 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\pi+t)-f(\pi)}{t}=f'(\pi)=-\sin\pi=0$. 故选 B.

(2)**解**：①因为 $s'(t)=\cos t$，

所以 $s'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，

即质点在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 时的速度为 $\dfrac{1}{2}$.

②令 $v(t)=\cos t$，

所以加速度为 $v'(t)=(\cos t)'=-\sin t$.

【应用迁移】

1.解：因为 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{3}})'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$，

所以 $f'(1)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1}}=-\dfrac{1}{3}$.

2.解：因为 $f'(x)=-\sin x$，

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

任务 3

【探究活动】

例 3　解：因为 $y'=\frac{1}{x}$，所以切线斜率 $k=y'|_{x=e}=\frac{1}{e}$，

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $x-ey=0$.

［一题多思］

思考 1.解：设切点坐标为 (x_0,y_0)，由题意得 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=k$. 又 $y_0=kx_0+1$，$y_0=\ln x_0$，解得 $y_0=2$，$x_0=e^2$.

所以 $k=\frac{1}{e^2}$.

思考 2.解：因为 $O(0,0)$ 不在曲线 $y=\ln x$ 上，

所以设切点为 $Q(x_0,y_0)$，则切线的斜率 $k=\frac{1}{x_0}$.

又切线的斜率 $k=\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$，所以 $\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0=e$，所以 $Q(e,1)$，所以 $k=\frac{1}{e}$.

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $x-ey=0$.

【应用迁移】

1.解：(1) 因为点 $P(1,1)$ 在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上，且 $y'=-\frac{1}{x^2}$，

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=-1$.

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

(2) 设曲线 $y=\frac{1}{x}$ 过点 $Q(1,0)$ 的切线与曲线相切于点 $A\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$，

则切线的斜率 $k=-\frac{1}{x_0^2}$，

所以切线方程为 $y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点 $Q(1,0)$ 在切线上，

所以 $-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(1-x_0)$，解得 $x_0=\frac{1}{2}$，

故所求的切线方程为 $4x+y-4=0$.

2.解：因为 $f(x)=\cos x$，

所以 $f'(x)=-\sin x$.

所以曲线 $f(x)=\cos x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以所求直线的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所求直线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

即 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}$.

5.2.2　导数的四则运算法则

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1) $f'(x)\pm g'(x)$　(2) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　$cf'(x)$

(3) $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

【概念辨析】

1.(1)√　**提示**：若 $y=2\sin x-\cos x$，

则 $y'=(2\sin x)'-(\cos x)'=2\cos x+\sin x$.

(2)×　**提示**：因为 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$，所以 $f'(x)=2x+3$.

2.BC　**解析**：$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)'=1-\frac{2}{x^3}$，$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$，$(x\ln x)'=\ln x+1$，$(3^x)'=3^x\ln 3$，故 A，D 错误，B，C 正确.

3.(1) **提示**：可以. $[u(x)\pm v(x)\pm\cdots\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm\cdots\pm w'(x)$.

(2) **提示**：由导数的运算法则可知，这两个关系式都成立.

任务型课堂

任务 1

解：(1) 因为 $f(x)=-2x^3+4x^2$，

所以 $f'(x)=(-2x^3+4x^2)'=(-2x^3)'+(4x^2)'=-6x^2+8x$.

(2) 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+1(a>0)$，

所以 $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+1\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-(x^2)'+(ax)'+1'=x^2-2x+a$.

(3) 因为 $f(x)=x+\cos x$，$x\in(0,1)$，

所以 $f'(x)=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$，$x\in(0,1)$.

(4) 因为 $f(x)=-x^2+3x-\ln x(x>0)$，

所以 $f'(x)=(-x^2+3x-\ln x)'=(-x^2)'+(3x)'-(\ln x)'=-2x+3-\frac{1}{x}$，$x>0$.

任务 2

【探究活动】

例 1　解：(1) $f'(x)=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+xe^x=$

$(1+x)e^x$.

(2) $f'(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$

$=\frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

(3)(方法一)

$f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(方法二)因为 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+\frac{2}{e^x-1}$,

所以 $f'(x)=\frac{2'(e^x-1)-2(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(4) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$,

所以 $f'(x)=\frac{1}{2}(-\sin x)=-\frac{1}{2}\sin x$.

【应用迁移】

解:(1) $y'=(3x^2)'+(x\sin x)'=6x+\sin x+x(\sin x)'$

$=6x+\sin x+x\cos x$.

(2) $y'=(x^2+3)'(e^x+\ln x)+(x^2+3)(e^x+\ln x)'=$

$2x(e^x+\ln x)+(x^2+3)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)$

$=e^x(x^2+2x+3)+2x\ln x+x+\frac{3}{x}$.

(3) $y'=\frac{(x\ln x)'(x+1)-x\ln x(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**:存在.设 $P(x_0,y_0)$.因为 $y=x\ln x$,

所以 $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

所以曲线 $y=x\ln x$ 在点 P 处的切线的斜率

$k=1+\ln x_0$.

又 $k=2$,所以 $1+\ln x_0=2$,所以 $x_0=e$.

所以 $y_0=e\ln e=e$.

所以点 P 的坐标是(e,e).

[一题多思]

思考 1.解:因为 $y=x\ln x$,所以 $y'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

当 $x=e$ 时,$y=e$,故切点坐标为(e,e).

因为所求切线的斜率 $k=y'|_{x=e}=\ln e+1=2$,所以切线方程为 $y-e=2(x-e)$,即 $2x-y-e=0$.

思考 2.解:设曲线 $y=x\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 平行,则点 (x_0,y_0) 到直线 $x-y-2=0$ 的距离即为最短距离.

因为 $y'=\ln x+1$,所以 $y'|_{x=x_0}=\ln x_0+1=1$,解得 $x_0=1$,

所以 $y_0=0$,即切点坐标为(1,0).

所以切点(1,0)到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|1-0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即曲线 $y=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【应用迁移】

1.D **解析**:因为 $y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$,

所以 $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$,

所以 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在 $x=3$ 处的导数为 $-\frac{1}{2}$.

所以 $-a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,即 $a=-2$.

2.解:(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq0)$,

所以 $f'(x)=2ax+b$.

又知 $f'(x)=2x-8$,所以 $a=1,b=-8$.

(2)由(1)可知 $g(x)=e^x\sin x+x^2-8x+3$,

所以 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+2x-8$.

因为 $g'(0)=e^0\sin 0+e^0\cos 0+2\times0-8=-7$,

且 $g(0)=3$,所以曲线 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的方程为 $y-3=-7(x-0)$,即 $7x+y-3=0$.

5.2.3 简单复合函数的导数

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$y=f(g(x))$

知识点二

$y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 乘积

【概念辨析】

1.(1)√ (2)√

(3)× **提示**:$y'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$.

(4)× **提示**:$y=x\cos x$ 是两个函数的积.

2.BD **解析**:$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=0$,$(e^{2x})'=2e^{2x}$,$(\sin 3x)'=3\cos 3x$,$[\ln(-x+1)]'=\frac{-1}{-x+1}=\frac{1}{x-1}$,所以 B,D 正确.

3.(1)**提示**:计算自变量 $x=1$ 时 $y=\ln(2x-1)$ 的函数值,可分以下两步:

①计算 $2\times1-1=1$,用的函数是一次函数 $u=2x-1$;

②计算 $y=\ln 1=0$,用的函数是对数函数 $y=\ln u$.

据此可知,函数 $y=\ln(2x-1)$ 是由内层为一次函数 $u=2x-1$ 和外层对数函数 $y=\ln u$ 复合而成的.

(2)**提示**:(方法一)函数 $y=\sin 2x$ 可以看作函数 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 的复合函数,根据复合函数求导法则有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'\cdot(2x)'=2\cos u=2\cos 2x$.

(方法二)因为 $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$,所以 $y'=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x$.

任务型课堂

任务 1

1. $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ **解析**:因为 $y=(1-\sqrt{x})\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$,

所以 $y'=(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'-(x^{\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2. $y'=\sin x-\cos x$ **解析**:因为 $y=\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=-\sin x-\cos x$,所以 $y'=(-\sin x-\cos x)'=\sin x-\cos x$.

3. $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$ **解析**:因为 $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{2}{1-x}$,所以 $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$.

任务 2

【探究活动】

例 1 **解**:(1)原函数可看作 $y=u^4$,$u=2x-1$ 的复合函数,

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^4)'\cdot(2x-1)'=4u^3\cdot 2=8(2x-1)^3$.

(2)$y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 可看作 $y=u^{-\frac{1}{2}}$,$u=1-2x$ 的复合函数,

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)=(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

(3)原函数可看作 $y=\sin u$,$u=-2x+\frac{\pi}{3}$ 的复合函数,

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot(-2)=-2\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(4)原函数可看作 $y=10^u$,$u=2x+3$ 的复合函数,

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=10^{2x+3}\cdot\ln 10\cdot 2=(\ln 100)10^{2x+3}$.

【应用迁移】

解:(1)因为 $y=\frac{x^2}{(2x+1)^3}$,所以 $y'=\frac{2x\cdot(2x+1)^3-x^2\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6}=\frac{2x-2x^2}{(2x+1)^4}$.

(2)因为 $y=e^{-x}\sin 2x$,所以 $y'=-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cos 2x=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$.

(3)因为 $y=\ln\sqrt{2x+1}-1=\frac{1}{2}\ln(2x+1)-1$,所以 $y'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+1}\times(2x+1)'=\frac{1}{2x+1}$.

(4)因为 $y=\cos(-2x)+3^{2x+1}=\cos 2x+3^{2x+1}$,

所以 $y'=-2\sin 2x+(2x+1)'3^{2x+1}\ln 3=-2\sin 2x+2\cdot 3^{2x+1}\ln 3$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**:$y'=-5e^{-5x}$,曲线在点(0,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=-5$,故切线的方程为 $y-1=-5(x-0)$,即 $5x+y-1=0$.

[一题多思]

思考 1.解:设切点为 (x_0,y_0),因为 $y'=-5e^{-5x}$,由已知条件得 $-5e^{-5x_0}=-\frac{5}{e}$,整理得 $e^{-5x_0}=e^{-1}$,所以 $-5x_0=-1$,解得 $x_0=\frac{1}{5}$,所以 $y_0=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

故直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{e}=-\frac{5}{e}\left(x-\frac{1}{5}\right)$,即 $5x+ey-2=0$.

思考 2.解:令 $y=f(x)$,则曲线 $y=e^{ax}$ 在点(0,1)处的切线的斜率为 $f'(0)$,又切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直,所以 $f'(0)=2$.因为 $f(x)=e^{ax}$,所以 $f'(x)=(e^{ax})'=e^{ax}\cdot(ax)'=ae^{ax}$,所以 $f'(0)=ae^0=a$,故 $a=2$.

【应用迁移】

BCD **解析**:直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的斜率为 $k=\frac{1}{2}$.

$f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,切线的斜率均小于 0,故 A 排除;

$f(x)=x^4$ 的导数为 $f'(x)=4x^3$,令 $4x^3=\frac{1}{2}$,解得 $x=\frac{1}{2}$,故 B 符合题意;

$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$,$\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ 有解,故 C 符合题意;

$f(x)=e^{2x}$ 的导数为 $f'(x)=2e^{2x}$,令 $2e^{2x}=\frac{1}{2}$,解得 $x=-\ln 2$,故 D 符合题意.故选 BCD.

微专题培优(三) 公切线问题

类型 1

例 1 **解**:(1)因为 $f(x)=x^2+x$,所以 $f'(x)=2x+1$,所以 $f'(0)=1$,

则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线的方程为 $y=x$.

(2)设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的公切点为

$P(x_0,y_0)$.

因为 $f(x)=x^2+x$，$g(x)=\ln x+2x$，所以 $f'(x)=2x+1$，$g'(x)=\frac{1}{x}+2$.

令 $f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $2x_0+1=\frac{1}{x_0}+2$，

得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$(舍)，所以 $P(1,2)$，$f'(1)=3$，

所以所求公切线方程为 $y-2=3(x-1)$ 即 $3x-y-1=0$.

【对点训练】

1.B　**解析**：设直线 l 与 $y=f(x)$ 的切点坐标为 (x_1,y_1)，直线 l 与 $y=g(x)$ 的切点坐标为 (x_2,y_2).

由 $f'(x)=e^{x-1}$，$g'(x)=e^x$，得 $e^{x_1-1}=e^{x_2}$，所以 $x_1-1=x_2$.所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=e^{x_2}$，即 $\frac{e^{x_1-1}-e^{x_2}+1}{x_1-x_2}=e^{x_2}$.由 $x_1-1=x_2$，可得 $\frac{e^{x_2}-e^{x_2}+1}{1}=e^{x_2}$，解得 $x_2=0$，所以 $y_2=e^0-1=0$，直线 l 的斜率为 $k=e^{x_2}=1$，所以直线 l 的方程为 $y=x$.故选 B.

2.C　**解析**：设直线 l 与 $f(x)$，$g(x)$ 图象的切点坐标分别为 $(x_1,e^{x_1}-2)$，$(x_2,\ln x_2)$.因为 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2}=\frac{\ln x_2+2-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，所以 $e^{x_1}=\frac{\ln e^{-x_1}+2-e^{x_1}}{e^{-x_1}-x_1}$，整理得 $(x_1-1)(e^{x_1}-1)=0$，解得 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=\frac{1}{e}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=1,\end{cases}$ 所以直线 l 的方程为 $y-(e-2)=e\times(x-1)$ 或 $y+1=1\times(x-0)$，即 $y=ex-2$ 或 $y=x-1$.故选 C.

类型 2

例 2　ln 2　**解析**：由 $y=e^x+x$ 得 $y'=e^x+1$，$y'|_{x=0}=e^0+1=2$，故曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的方程为 $y=2x+1$；由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\frac{1}{x+1}$，设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 切于点 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，由两曲线有公切线得 $y'=\frac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\frac{1}{2},a+\ln\frac{1}{2}\right)$，切线方程为 $y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)+a+\ln\frac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$.根据两切线重合，得 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

【对点训练】

A　**解析**：设直线 l 的方程为 $y=x+b$，由直线 l 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切，可得 $\frac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $b=\pm1$.当 $b=1$ 时，设直线 $y=x+1$ 和曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切于点 (m,n)，根据导数的几何意义，得 $\frac{1}{m+a}=1$，又切点同时在直线和曲线上，则 $\begin{cases}n=m+1,\\n=\ln(m+a),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=0,\\m=-1,\\a=2,\end{cases}$ 此时直线 $y=x+1$ 和曲线 $y=\ln(x+2)$ 相切；当 $b=-1$ 时，同理可得 $a=0$，此时直线 $y=x-1$ 和曲线 $y=\ln x$ 相切.综上所述，$a=2$ 或 $a=0$.

类型 3

例 3　**解**：(1)设直线 $ax-4y+3=0$ 与曲线 $y=3\sqrt{x}$ 的切点坐标为 $M(x_0,y_0)$.

因为 $y=3\sqrt{x}$，所以 $y'=\frac{3}{2\sqrt{x}}$.

又因为直线 l 的斜率为 $\frac{a}{4}$，所以 $\frac{3}{2\sqrt{x_0}}=\frac{a}{4}$①，

且点 $M(x_0,y_0)$ 同时在直线 $ax-4y+3=0$ 和曲线 $y=3\sqrt{x}$ 上，

所以 $\begin{cases}ax_0-4y_0+3=0,\\y_0=3\sqrt{x_0}\end{cases}$ ②，联立①②可得 $a=12$.

故直线 l 的方程为 $12x-4y+3=0$.

联立 $\begin{cases}12x-4y+3=0,\\y=kx^2,\end{cases}$ 可得 $kx^2-3x-\frac{3}{4}=0$.

又因为直线与曲线相切，所以 $\Delta=9+3k=0$，解得 $k=-3$.

(2)由(1)得 $f(x)=x^3-mx^2+2$，$f'(x)=3x^2-2mx$.

设切点为 $P(x_1,y_1)$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线的方程为

$y-(x_1^3-mx_1^2+2)=(3x_1^2-2mx_1)(x-x_1)$.

又因为切线过点 $(0,m)$，所以 $(x_1-1)[2x_1^2+(2-m)x_1+(2-m)]=0$，

所以方程 $2x^2+(2-m)x+2-m=0$ 有两个不相等的实数根，且不为 1，

所以 $\begin{cases}\Delta=(2-m)^2-4\times2\times(2-m)>0,\\6-2m\neq0,\end{cases}$

解得 $m<-6$ 或 $2<m<3$ 或 $m>3$.

所以实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m<-6$ 或 $2<m<3$ 或 $m>3\}$.

【对点训练】

B　**解析**：因为 $f(x)=x^3-ax^2+\left(\frac{2}{3}a+1\right)x(a\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax+\left(\frac{2}{3}a+1\right)$，因为曲线 $y=f(x)$ 存在两条垂直于 y 轴的切线，所以关于 x 的方程 $3x^2-2ax+\left(\frac{2}{3}a+1\right)=0$ 有两个不等的实根，则 $\Delta=4a^2-12\left(\frac{2}{3}a+1\right)>0$，即 $a^2-2a-3>0$，解得 $a>3$ 或 $a<-1$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.故选 B.

5.3 导数在研究函数中的应用

5.3.1 函数的单调性

第 1 课时 函数的单调性

问题式预习

【知识清单】

知识点

增 减

【概念辨析】

1.(1)√ (2)√

2.B **解析**:在区间(1,3)内,函数 $y=f(x)$ 的图象是下降的,函数单调递减,所以 $f'(x)<0$.

3.(1)**提示**:常数函数.

(2)**提示**:不一定成立.比如 $y=x^3$ 在 **R** 上为增函数,但其在 $x=0$ 处的导数等于零,也就是说"$f'(x)>0$"是"$y=f(x)$ 在某个区间上单调递增"的充分不必要条件.

任务型课堂

任务 1

1.D **解析**:原函数的图象在[−3,3]上先减后增,再减再增,对应的导函数的值先负后正,再负再正,且原函数的图象在点(0,0)处与 x 轴相切,故 $f'(0)=0$,只有选项 D 的图象符合.故选 D.

2.D **解析**:根据已知导函数 $y=f'(x)$ 的图象可知,原函数先减再增,再减再增,且 $x=0$ 位于单调递增区间内.故选 D.

3.BD **解析**:当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)<0$,则函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,故 A 错误;同理,函数 $y=f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增,故 B 正确;由题图可知,$f'(3)=f'(5)=0$,故 C 错误;函数 $y=f(x)$ 在[−1,3]上单调递增,则 $f(-1)<f(3)$,故 D 正确.故选 BD.

4.$\{x\mid x<-\sqrt{3}$,或 $0<x<\sqrt{3}\}$ **解析**:由题图,知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上单调递减.所以当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 或 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时,$f'(x)<0$.故不等式 $xf'(x)<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-\sqrt{3}$,或 $0<x<\sqrt{3}\}$.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)C **解析**:$y'=\ln x+1$,令 $y'>0$,得 $x>\frac{1}{e}$,又 $x\in(0,5)$,故 $\frac{1}{e}<x<5$,令 $y'<0$,得 $0<x<\frac{1}{e}$,所以函数 $y=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},5\right)$ 上单调递增.故选 C.

(2)**解**:①因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$,$x\in\mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$,

所以函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$ 在 **R** 上单调递增.

②因为 $f(x)=x-e^x$,$x\in(0,+\infty)$,所以 $f'(x)=1-e^x<0$,所以 $f(x)=x-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【应用迁移】

1.BD **解析**:对于 A 选项,由 $f(x)=x^4$ 得 $f'(x)=4x^3$,当 $x>0$ 时,$f'(x)=4x^3>0$,则 $f(x)$ 单调递增;当 $x<0$ 时,$f'(x)=4x^3<0$,则 $f(x)$ 单调递减,故排除 A.对于 B 选项,由 $f(x)=x-\sin x$ 得 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,显然 $f'(x)$ 不恒为零,所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,故 B 满足题意.对于 C 选项,由 $f(x)=xe^x$ 得 $f'(x)=(1+x)e^x$,当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$ 单调递增;当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$ 单调递减,故排除 C.对于 D 选项,由 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 得 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,故 $f'(x)$ 不恒为零,所以 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,故 D 满足题意.故选 BD.

2.解:(1)因为 $f(x)=x^2-2x+4$,

所以 $f'(x)=2x-2=2(x-1)$.

令 $f'(x)>0$,即 $x-1>0$,解得 $x>1$;令 $f'(x)<0$,即 $x-1<0$,解得 $x<1$.

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

(2)因为 $f(x)=e^x-x$,所以 $f'(x)=e^x-1$.

令 $f'(x)>0$,即 $e^x-1>0$,解得 $x>0$;

令 $f'(x)<0$,即 $e^x-1<0$,解得 $x<0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**:(1)函数 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$ 的定义域为 **R**.对 $f(x)$ 求导数,得 $f'(x)=6x^2+6x-36=6(x-2)(x+3)$.

由 $f'(x)>0$,解得 $x<-3$ 或 $x>2$;

由 $f'(x)<0$,解得 $-3<x<2$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-3)$ 和 $(2,+\infty)$,单调递减区间是 $(-3,2)$.

(2)函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,对 $f(x)$ 求导数,得

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x)>0$,即 $\frac{1-\ln x}{x^2}>0$,则 $\ln x<1$,解得 $0<x<e$;

令 $f'(x)<0$，即$\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，则 $\ln x>1$，解得 $x>e$.

故 $f(x)$的单调递增区间是$(0,e)$，单调递减区间是$(e,+\infty)$.

[一题多思]

思考 1.提示：通常要利用通分、配方、因式分解等方法将导函数化为非负(正)项之和、连乘式、分式等易于判断符号的结构形式.

思考 2.解：函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

令 $f'(x)>0$，则 $\ln x>-1$，解得 $x>\frac{1}{e}$；

令 $f'(x)<0$，则 $\ln x<-1$，解得 $0<x<\frac{1}{e}$.

故 $f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，单调递减区间是$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

【应用迁移】

解：(1)$y'=-3x^2-4x-4$，则 $\Delta=(-4)^2-4\times(-3)\times(-4)=-32<0$，

所以 $y'<0$ 在 **R** 上恒成立，所以函数的单调递减区间为 **R**，无单调递增区间.

(2)$y=(x+1)(x^2-1)=x^3+x^2-x-1$，则 $y'=3x^2+2x-1$.

令 $y'>0$，得 $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{3}$；令 $y'<0$，得 $-1<x<\frac{1}{3}$.

所以函数的单调递增区间为$(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

(3)函数的定义域为$\{x\mid x\neq0\}$，$y'=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}$.

令 $y'>0$，得 $x>\frac{1}{2}$；令 $y'<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x<0$.

所以函数的单调递减区间为$(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(4)函数的定义域为$\{x\mid x>0\}$，$y'=\ln x+1$.

令 $y'>0$，得 $x>\frac{1}{e}$；令 $y'<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$.

所以函数的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

第 2 课时　函数的单调性的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

定义域　零点　正负

知识点二

较快　陡峭　较慢　平缓

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√

(3)×　**提示**：$y'=3ax^2$. 当 $a>0$ 时，$y'\geqslant0$，仅在 $x=0$ 时 $y'=0$，所以函数在 **R** 上单调递增；当 $a<0$ 时，$y'\leqslant0$，仅在 $x=0$ 时 $y'=0$，所以函数在 **R** 上单调递减；当 $a=0$ 时，$y'=0$，函数在 **R** 上不具备单调性.

2.D　**解析**：从 $f'(x)$的图象可以看出，在区间(a,b)上，$f'(x)$先增后减，所以 $f(x)$的图象先越来越陡，之后越来越平缓，只有选项 D 符合.

3.(1)**提示**：$f(x)$仍单调递增(单调递减的情形类似).

(2)**提示**：可导函数 $f(x)$在区间(a,b)上单调递增的充要条件是对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)\geqslant0$，且在(a,b)的任一非空子区间上 $f'(x)$不恒为 0.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　**解**：(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，

$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$内单调递减，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)由题意可得 $x>0$，$f'(x)=\frac{2a}{x}+2x-a-4=\frac{2x^2-(a+4)x+2a}{x}=\frac{(x-2)(2x-a)}{x}$.

若 $a\leqslant0$，则当 $x\in(0,2)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$；

若 $0<a<4$，则当 $x\in\left(\frac{a}{2},2\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in$

$\left(0,\frac{a}{2}\right)\cup(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$；

若$a=4$，则$f'(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立；

若$a>4$，则当$x\in\left(2,\frac{a}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(0,2)\cup\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，在$(0,2)$内单调递减；当$0<a<4$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},2\right)$内单调递减；当$a=4$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a>4$时，$f(x)$在$(0,2)$和$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(2,\frac{a}{2}\right)$上单调递减.

【应用迁移】

解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.当$a\leqslant 0$时，$f'(x)=\frac{ax-1}{x}<0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{a}$.当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$，无单调递增区间；当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$.

任务 2

【探究活动】

例 2 (1)$(-\infty,0]$ **解析**：由已知得$f'(x)=3x^2-a$，因为$f(x)$为**R**上的增函数，

所以$f'(x)=3x^2-a\geqslant 0$在**R**上恒成立，

即$a\leqslant 3x^2$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立.因为$3x^2\geqslant 0$，所以只需$a\leqslant 0$.

又因为当$a=0$时，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，$f(x)=x^3-1$在**R**上是增函数.所以实数a的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)**解**：$f(x)=2x^2-\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，对$f(x)$求导数，得$f'(x)=4x-\frac{1}{x}$.令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{2}$，或$x=-\frac{1}{2}$(舍去).当$x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增.

因为$f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递增，所以$(2m,m+1)\subseteq\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

所以$\begin{cases}m+1>2m,\\2m\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\frac{1}{4}\leqslant m<1$.

因此，实数m的取值范围是$\left[\frac{1}{4},1\right)$.

[一题多思]

思考 1.解：由题意可知$f'(x)=3x^2-a\leqslant 0$在$(-1,1)$上恒成立，所以$\begin{cases}f'(-1)\leqslant 0,\\f'(1)\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}3-a\leqslant 0,\\3-a\leqslant 0,\end{cases}$所以$a\geqslant 3$，即实数$a$的取值范围是$[3,+\infty)$.

思考 2.解：对$f(x)$求导数，得$f'(x)=3x^2-a$.

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)\geqslant 0$，且$f'(x)$不恒为0，

所以$f(x)$在**R**上为增函数，不满足题意.

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$，或$x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.当$-\frac{\sqrt{3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$内单调递减，即函数$f(x)$的单调递减区间为$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$.由已知函数$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$，所以$\frac{\sqrt{3a}}{3}=1$，即$a=3$.

【应用迁移】

1.B **解析**：因为$f(x)=\frac{x^2-a}{e^x}$，所以$f'(x)=\frac{2x-(x^2-a)}{e^x}=\frac{a+2x-x^2}{e^x}$.由题意可知，存在$x\in\mathbf{R}$，使得$f'(x)>0$，即存在$x\in\mathbf{R}$，使得$a>x^2-2x$.二次函数$y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，当且仅当$x=1$时，等号成立，所以$a>-1$，即实数$a$的取值范围是$(-1,+\infty)$.

2.C **解析**：由$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{t}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$可得$f'(x)=x^3-tx^2+3x$，$f''(x)=3x^2-2tx+3$.

因为函数$f(x)$在$(1,4)$上为“凸函数”，所以$3x^2-2tx+3<0$在$(1,4)$上恒成立，

即$t>\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$在$(1,4)$上恒成立.

令$g(x)=\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$，

易知$g(x)$在$(1,4)$上单调递增，所以$t\geqslant g(4)=\frac{51}{8}$，所以$t\geqslant\frac{51}{8}$.

所以实数t的取值范围是$\left[\frac{51}{8},+\infty\right)$.故选C.

3.解：由题意得$f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}$.

因为$f(x)$在$(0,1]$上单调递增，

所以 $f'(x)\geqslant 0$，即 $a\geqslant -\frac{1}{x^3}$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.

令 $g(x)=-\frac{1}{x^3}$，则 $g(x)=-\frac{1}{x^3}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$，所以 $a\geqslant -1$.

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-2+\frac{2}{x^3}$，

$\forall x\in(0,1]$，$f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增时，实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

任务 3

【探究活动】

例 3 (1)A **解析**：由题意得 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增.又 $1<\sqrt{x}<x<3$，所以 $f(\sqrt{x})<f(x)$.由 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，可知当 $x\in(1,3)$ 时，$f(x)>f(1)=e$，所以 $[f(x)]^2>f(x)$.所以 $f(\sqrt{x})<f(x)<[f(x)]^2$.

(2)A **解析**：令 $g(x)=f(x)-2x+4$，则 $g'(x)=f'(x)-2>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(2)=f(2)-2\times 2+4=0$，

则不等式 $f(x)-2x+4>0$ 等价于 $g(x)>g(2)$，所以 $x>2$.故选 A.

【应用迁移】

1.A **解析**：已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(x^2+1)e^x$，由 $\begin{cases}x^2+1\geqslant 1,\\ e^x>0,\end{cases}$ $x\in\mathbf{R}\Rightarrow f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.因为 $2<e<\pi$，所以 $f(2)<f(e)<f(\pi)$.故选 A.

2.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ **解析**：设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$.因为当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.又 $f(2)=0$，则 $g(2)=2f(2)=0$，所以不等式 $xf(x)>0$ 等价于 $g(x)>0=g(2)$，所以 $|x|>2$，解得 $x<-2$ 或 $x>2$，所以不等式 $xf(x)>0$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

5.3.2 函数的极值与最大(小)值

第 1 课时 函数的极值

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$f'(x)<0$ $f'(x)>0$ $f'(x)>0$ $f'(x)<0$ 极小值点 极大值点 极小值 极大值

知识点二

(1)极大值 (2)极小值

【概念辨析】

1.(1)× **提示**：不一定，如 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

(2)× **提示**：切线不一定与 x 轴平行.

(3)√ (4)√

2.A **解析**：$y'=6x^2-2x$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{3}$.当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'>0$；当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时，$y'<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时，$y'>0$.故 $x=0$ 是极大值点，则极大值 $y=0$.

3.(1)**提示**：正确.

(2)**提示**：极大值点是函数单调递增区间与单调递减区间的分界点，极小值点是函数单调递减区间与单调递增区间的分界点.

(3)**提示**：依据极值的定义可知，若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上没有极值.

任务型课堂

任务 1

1.A **解析**：根据函数极值点的定义可知，若 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$；反之，当 $f'(x_0)=0$ 时，x_0 不一定为函数 $y=f(x)$ 的极值点，比如 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，满足 $f'(0)=0$，但 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，即 0 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点，故“x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点”是“$f'(x_0)=0$”的充分不必要条件.故选 A.

2.C **解析**：由题图可得，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 内单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.故选 C.

3.D **解析**：由题图可知，$f'(-2)=0$，$f'(2)=0$，且当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$.又当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 有极小值 $f(2)$.故选 D.

任务 2

【探究活动】

例 1 **解**：(1)$f'(x)=3x^2-6x-9$.令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-6x-9=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-1)=10$；当 $x=3$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，且极小值为

$f(3)=-22$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-x$，解方程 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-1$(舍去).

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

由表可知，$x=1$ 为函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的极大值点，且极大值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 不存在极小值.

(3)函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=2-\frac{8}{x^2}$.令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减		单调递减	极小值	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-2)=-8$；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(2)=8$.

【应用迁移】

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=x^2-2x-3$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=-1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值 $\frac{14}{3}$	单调递减	极小值 -6	单调递增

由上表可以看出，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

所以 $f(x)_{极大值}=\frac{14}{3}$，$f(x)_{极小值}=-6$.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	$4e^{-2}$	单调递减

由上表可以看出，当 $x=0$ 时，函数有极小值，且 $f(0)=0$；当 $x=2$ 时，函数有极大值，且 $f(2)=\frac{4}{e^2}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)BCD **解析**：函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$.

因为函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值，所以函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个变号零点，而 $a\neq0$，

因此方程 $ax^2-bx-2c=0$ 有两个不相等的正根 x_1，x_2.

于是 $\begin{cases}\Delta=b^2+8ac>0,\\ x_1+x_2=\frac{b}{a}>0,\\ x_1x_2=-\frac{2c}{a}>0,\end{cases}$ 即有 $b^2+8ac>0$，$ab>0$，$ac<0$，显然 $a^2bc<0$，即 $bc<0$，A 错误，B，C，D 正确.故选 BCD.

(2)**解**：①令 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值，且 $f(-1)=2+a$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，且 $f(1)=-2+a$.

②由①知，$2+a<0$ 或 $-2+a>0$，即 $a<-2$ 或 $a>2$.

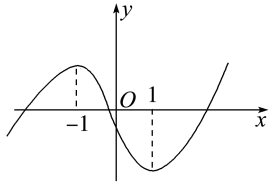
所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

[一题多思]

思考 1.解：由①知，$2+a=0$ 或 $-2+a=0$，即 $a=-2$ 或 $a=2$.

思考 2.解：因为方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实数根，

所以 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点，如图所示.



由①知，应有 $\begin{cases}2+a>0,\\ -2+a<0,\end{cases}$

解得 $-2<a<2$，故实数 a 的取值范围是 $(-2,2)$.

【应用迁移】

1.解：(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

依题意可得 $f'(1)=0$，$f(1)=\frac{5}{2}$，

即 $\begin{cases}3+2a+b=0,\\ 1+a+b+4=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=-2,\end{cases}$ 经验证成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+4$，

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数的另一个极值在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得，是极大值，极大值为 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{130}{27}$.

2.解：(1) 因为 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$，所以 $f'(1)=1+a$，

又 $f(1)=-a$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+a=(1+a)(x-1)$.

因为切线经过点 $(0,1)$，所以 $1+a=(1+a)(0-1)$，解得 $a=-1$.

(2) 由(1)知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-a$，

所以当 $0<x<-a$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 内单调递减，

当 $x>-a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=-a$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(-a)=\ln(-a)+1$，

由 $\ln(-a)+1>2$，得 $a<-\mathrm{e}$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-\mathrm{e})$.

第 2 课时　函数的最大(小)值

问题式预习

【知识清单】

知识点

1.连续不断　最大值　最小值

2.(1)极值　(2)极值　$f(a)$　$f(b)$　最大值　最小值

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)√

2.D　**解析**：$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$，且 $f(1)=1$，$f(-1)=5$，$f(-3)=-15$，$f(3)=21$.故选 D.

3.(1)**提示**：不是.函数的最值是一个整体性概念，函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的.

(2)**提示**：不可以.一个函数的最大(小)值是唯一的.

(3)**提示**：最值可以在区间内取得，也可以在端点处取得.极值有可能为最值，最值不在端点处取得时一定是极值.

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**：根据题图可知，在 $(-1,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故选项 A 正确；在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,3)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故选项 B 正确；所以 $f(x)$ 的极小值点为 -1，3，极大值点为 1，故选项 C 错误；由上述分析可知，函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(-1)$ 和 $f(3)$ 两者中较小的一个，没有最大值，故选项 D 正确.故选 C.

2.BD　**解析**：由题图可知，当 $x\in(-\infty,x_3)\cup(x_5,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_3,x_5)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 (x_3,x_5) 上单调递减，在 $(-\infty,x_3)$，$(x_5,+\infty)$ 上单调递增，极小值为 $f(x_5)$，在 $[x_1,x_5]$ 上的最大值为 $f(x_3)$，所以选项 A 和 C 错误，选项 B 和 D 正确.故选 BD.

3.①④　**解析**：$f'(x)=\cos x-\frac{1}{3}$，由 $f'(x)=0$，得 $\cos x=\frac{1}{3}$.因为 $x\in[0,\pi]$，$\cos x_0=\frac{1}{3}$，$x_0\in[0,\pi]$，所以 $x=x_0$.当 $0\leqslant x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0<x\leqslant\pi$ 时，$f'(x)<0$.所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\pi]$ 上单调递减，所以 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值且为最大值.真命题为①④.

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$(舍去).

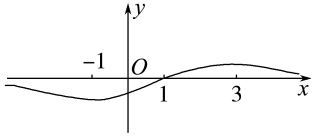
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-14	单调递增	极大值 -10	单调递减	-12

所以当 $x=-1$ 时，函数取最小值 $f(-1)=-14$；当 $x=0$ 时，函数取最大值 $f(0)=-10$.

(2) $f'(x)=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$.容易验证函数在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=3$ 处取得极大值.又因为当 $x=1$ 时，$f(x)=0$，当 $x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，所以可以画出函数的大致图象，如图所示.



由图象可知，函数的最大值为 $f(3)=\dfrac{3-1}{3^2+3}=\dfrac{1}{6}$，最小值为 $f(-1)=\dfrac{-1-1}{(-1)^2+3}=-\dfrac{1}{2}$.

【应用迁移】

解：(1) $f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	单调递增	极大值 11	单调递减	极小值 -1	单调递增	11

从表中可以看出，当 $x=-2$ 或 1 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 -1.

当 $x=-1$ 或 2 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 11.

(2) $f'(x)=2\cos 2x-1$. 令 $f'(x)=0$，得 $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x\in[-\pi,\pi]$.

所以 $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}$，$x=\pm\dfrac{\pi}{6}$.

易知函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的两个极值分别为 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}$.

又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

比较以上函数值可得 $f(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)_{\min}=-\dfrac{\pi}{2}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)**解**：因为 $f(x)=a(e^x+a)-x$，定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=ae^x-1$.

当 $a\leqslant 0$ 时，由于 $e^x>0$，则 $ae^x\leqslant 0$，故 $f'(x)=ae^x-1<0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=ae^x-1=0$，解得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)**证明**：由(1)得，$a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$.

要证 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$ 恒成立，即证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，即证 $a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立.

令 $g(a)=a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a(a>0)$，

则 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$.

令 $g'(a)<0$，得 $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，得 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，所以 $g(a)>0$ 恒成立.

因此，当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$ 恒成立.

【应用迁移】

1.证明：(1)构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，

$x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点，即 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$.

(2)构造函数 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，

由(1)可知，$g'(x)\geqslant 0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+x+1$.

2.证明：令 $f(x)=\tan x-2x+\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'-(2x)'+(\sin x)'$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}-2+\cos x$

$=\dfrac{1+\cos^3 x-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1-\cos^2 x+\cos^3 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1-\cos x)(\cos x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}$.

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $1-\cos x>0$，$\cos x+\sin^2 x>0$，

所以 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\tan x-2x+\sin x>0$，

即 $x-\sin x<\tan x-x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

第 3 课时　函数极值、最值的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)定义域　(2)$f'(x)$　(3)零点　正负　极值

(4)特殊点

【概念辨析】

1.A　**解析**：要使材料最省，则要求新砌的墙壁的总长最短.设堆料场的宽为 x m，则长为 $\frac{512}{x}$ m，因此新砌墙壁总长 $L=2x+\frac{512}{x}(x>0)$，则 $L'=2-\frac{512}{x^2}$.令 $L'=0$，得 $x=16$ 或 $x=-16$(舍去).此时长为 $\frac{512}{16}=32$(m)，可使 L 最短.

2.C　**解析**：设圆锥高为 h，底面半径为 r，则 $R^2=(h-R)^2+r^2$，

所以 $r^2=2Rh-h^2$.

所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h(2Rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

$V'=\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2$.令 $V'=0$，得 $h=\frac{4}{3}R$.

当 $0<h<\frac{4}{3}R$ 时，$V'>0$；

当 $\frac{4}{3}R<h<2R$ 时，$V'<0$.

故当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，圆锥的体积最大.

3.(1)**提示**：在求函数定义域时，不仅要考虑函数解析式本身的限制条件，还要注意实际问题中变量的取值范围.

(2)**提示**：①在建立函数模型时，应根据实际问题确定出函数的定义域.

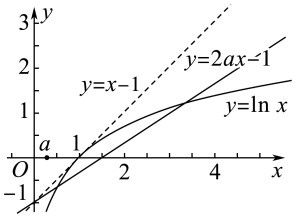
②求实际问题的最优解时，一定要从问题的实际意义出发，不符合实际意义的应舍去，如：长度、宽度应大于零，销售价格为正数等.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　B　**解析**：函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$，则 $f'(x)=\ln x-ax+x\left(\frac{1}{x}-a\right)=\ln x-2ax+1$，令 $f'(x)=\ln x-2ax+1=0$，得 $\ln x=2ax-1$.函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，等价于 $f'(x)=\ln x-2ax+1$ 有两个变号零点，等价于函数 $y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，在同一坐标系中作出它们的图象(如图).



当 $a=\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=2ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象相切，由图可知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.故选 B.

【应用迁移】

1.C　**解析**：由题中图象可知 $f(x)$ 的图象经过点(1，0)与(2，0)，x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的极值点，所以 $1+b+c=0$，$8+4b+2c=0$，解得 $b=-3$，$c=2$，所以 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+2$，x_1，x_2 是方程 $3x^2-6x+2=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=2$，$x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$，所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.故选 C.

2.B　**解析**：由 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$ 得函数的定义域为 $\{x\mid x>0$ 且 $x\neq1\}$，排除 A；令 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$，

由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，即函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$，即函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 有最小值，$g(x)_{\min}=g(1)=0$，于是对任意的 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，有 $g(x)>0$，故 $f(x)>0$，排除 C，D.故选 B.

任务 2

【探究活动】

例 2　**解**：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$，

$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$.

由 $V'=0$，得 $x=0$(舍去)或 $x=20$，

当 $x\in(0,20)$ 时，$V'>0$；当 $x\in(20,30)$ 时，$V'<0$，

所以当 $x=20$ 时，V 取得极大值，也是最大值.

此时 $\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$，即包装盒的高与底面边长的比值为 $\frac{1}{2}$.

[一题多思]

思考 1.解：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1\ 800$，

所以当 $x=15$ 时，S 取得最大值.

思考 2.解：由题意，制成盒子的高为 x cm，$0<x<30$，底面边长为 $(60-2x)$cm，

盒子的容积 $V=(60-2x)(60-2x)x=4x^3-240x^2+3\ 600x$，

$V'=12x^2-480x+3\ 600$.

令 $V'=0$，得 $x=10$ 或 $x=30$（舍去），

当 $x\in(0,10)$ 时，$V'>0$；

当 $x\in(10,30)$ 时，$V'<0$；

所以当 $x=10$ 时，$V_{最大值}=16\ 000$.

即当小正方形的边长为 10 cm 时，盒子的容积最大.

【应用迁移】

1.解：设 OO_1 为 x m，则 $1<x<4$.

由题设可得正六棱锥的底面边长为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$，

故底面正六边形的面积为

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2).$$

帐篷的体积为

$$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3),$$

求导得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$，解得 $x=-2$（不合题意，舍去）或 $x=2$.

当 $1<x<2$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增；

当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减.

故当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大，且最大值 $V(2)=16\sqrt{3}$.

所以当 OO_1 为 2 m 时，帐篷的体积最大，最大体积为 $16\sqrt{3}$ m^3.

2.解：当 $6\leqslant t<9$ 时，$y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36=-\frac{3}{8}(t^2+4t-96)=-\frac{3}{8}(t+12)(t-8)$.

令 $y'=0$，得 $t_1=-12$（舍去），$t_2=8$.

当 $6\leqslant t<8$ 时，$y'>0$；当 $8<t<9$ 时，$y'<0$.

所以当 $t=8$ 时，y 有最大值，$y_{max}=18.75$.

当 $9\leqslant t\leqslant 10$ 时，$y=\frac{t}{8}+\frac{55}{4}$ 单调递增，

所以当 $t=10$ 时，y 有最大值，$y_{max}=15$.

当 $10<t\leqslant 12$ 时，$y=-3(t-11)^2+18$，

所以当 $t=11$ 时，y 有最大值，$y_{max}=18$.

综上所述，通过该路段用时最多的时刻为上午 8 时.

任务 3

【探究活动】

例 3 (1)C **解析**：由 $f(0)\geqslant 0$，可得 $a\geqslant 0$.

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$\forall x\in(-\infty,1]$，$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2\geqslant 2a-a^2=a(2-a)>0$；

当 $a>1$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=1>0$.

故当 $a\geqslant 0$ 时，$x^2-2ax+2a\geqslant 0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立.

若 $x-a\ln x\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant\frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$，则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

当 $x>$e 时，函数 $g(x)$ 单调递增；当 $0<x<$e 时，函数 $g(x)$ 单调递减，

故 $g(x)_{min}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，所以 $a\leqslant$e.

综上可知，a 的取值范围是 $[0,\mathrm{e}]$.

故选 C.

(2)**解**：① 当 $a=1$ 时，$f(x)=2\ln x+x^2-x$，

可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{2}{x}+2x-1=\frac{2x^2-x+2}{x}>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间.

② 因为 $x_2>x_1>0$，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$，

即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$.

设函数 $g(x)=f(x)-x=2\ln x+x^2-(a+1)x$，$x>0$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

且 $g'(x)=\frac{2}{x}+2x-a-1=\frac{2x^2-(a+1)x+2}{x}$，

则 $g'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即 $2x^2-(a+1)x+2\geqslant 0$，也即 $a+1\leqslant 2x+\frac{2}{x}$ 恒成立.

又因为 $2x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}=4$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

可得 $a+1\leqslant 4$，即 $a\leqslant 3$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

【应用迁移】

1.解：由题可知 $a\leqslant\frac{1-x}{x}+\ln x$ 对于 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{1-x}{x}+\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，则 $a\leqslant g(x)_{min}$，

而 $g'(x)=\frac{-x-(1-x)}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$.

当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x\in(1,2]$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)=\frac{1-x}{x}+\ln x$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)=\frac{1-x}{x}+\ln x$ 取得的极小值，

也是最小值，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，故 $a\leqslant 0$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

2.解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln x+2(1-x)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-2$，则 $f'(1)=-1$，$f(1)=0$，

所以，所求切线方程为 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值；

若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 时取得最大值，

最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}+a\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$.

由题可知 $f\left(\frac{1}{a}\right)<3a-3$，可得 $\ln a+2a-2>0$.

令 $g(a)=\ln a+2a-2$，其中 $a>0$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}+2>0$，

所以，函数 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=0$.

由 $g(a)>0=g(1)$ 可得 $a>1$，所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

微专题培优(四)　利用导数研究不等式恒(能)成立问题

类型 1

例 1　**解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，

所以 $f'(1)=0$，又 $f(1)=1$，则所求切线方程为 $y=1$.

(2)$f(x)\geqslant\ln a\Leftrightarrow\ln(ax)+\frac{a}{x}\geqslant\ln a\Leftrightarrow\ln x+\frac{a}{x}\geqslant 0$，其中 $x>0$，

所以问题转化为 $a\geqslant -x\ln x(x>0)$ 恒成立.

记 $g(x)=-x\ln x$，则 $g'(x)=-\ln x-1$.

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{e}$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

则 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【对点训练】

解：(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2$，

$f'(x)=\ln x+1-x$. 令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

$g(x)_{\max}=g(1)=0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无单调递增区间.

(2)因为 $x>0$，$f(x)<2x$，所以 $a>\frac{\ln x-2}{x}$ 恒成立.

设 $h(x)=\frac{\ln x-2}{x}$，则 $h'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=e^3$.

当 $x\in(0,e^3)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(e^3,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

则 $h(x)_{\max}=h(e^3)=e^{-3}$. 所以 $a>e^3$.

所以实数 a 的取值范围是 $(e^{-3},+\infty)$.

类型 2

例 2　**解**：(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，而 $f(2)=2-\ln 2$，则切点坐标为 $(2,2-\ln 2)$.

易得 $f'(x)=x-\frac{1}{x}$，得到切线斜率为 $f'(2)=\frac{3}{2}$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-(2-\ln 2)=\frac{3}{2}(x-2)$，即 $3x-2y-2-2\ln 2=0$.

(2)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=x+2a-1-\frac{2a}{x}=\frac{(x+2a)(x-1)}{x}$，

而 $a>0$，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(1,+\infty)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,1)$，

即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

则当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(1)=2a-\frac{1}{2}$，得到 $2a-\frac{1}{2}\geqslant\frac{a^2}{2}-3$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 5$.

因为 $a>0$，所以 $0<a\leqslant 5$，即 a 的取值范围为 $(0,5]$.

【对点训练】

解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x^2$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2x$.

$f(1)=\ln 1-1^2=-1$，$f'(1)=\frac{1}{1}-2\times 1=-1$，

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 y

$+1=-(x-1)$，即 $x+y=0$.

(2) $f(x)=\ln x-ax^2(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=1$ 时，$f(1)=-a>0$，与题意不符.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2a}}$. 当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 内单调递增；当 $x\in\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，即 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\ln(2a)-\frac{1}{2}$.

由题意可得 $f(x)_{\max}<0$，解得 $a>\frac{1}{2e}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

类型 3

例 3 **解**：(1) $f'(x)=x^2-2x$，$f'(3)=3^2-2\times 3=3$，$f(3)=\frac{1}{3}\times 3^3-3^2=0$，

所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=3$ 处的切线的方程为 $y=3(x-3)=3x-9$.

(2) 由(1)知 $f'(x)=x^2-2x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.

所以当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $2<x\leqslant 3$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(2)=-\frac{4}{3}$.

又 $f(x)\leqslant m$ 在 $x\in[0,3]$ 时有解，所以 $m\geqslant[f(x)]_{\min}=-\frac{4}{3}$.

故 m 的取值范围为 $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$.

【对点训练】

解：(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^x-x$，则 $f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=e^0-0=1$.

(2) 由题设，存在 $x_0\in[2,3]$，使得 $f(x_0)\leqslant 0$ 成立，即存在 $x_0\in[2,3]$，使得 $2a\geqslant\frac{e^{x_0}}{x_0}$ 成立，所以 $2a\geqslant\left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，显然当 $x\in[2,3]$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，则 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{2}$，

所以 $2a\geqslant\frac{e^2}{2}\Rightarrow a\geqslant\frac{e^2}{4}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$.

微专题培优(五)　利用导数研究函数的零点问题

类型 1

例 1 **解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=3$.

当 $f'(x)<0$，即 $1<x<3$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $f'(x)>0$，即 $0<x<1$ 或 $x>3$ 时，$f(x)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间是 $(1,3)$.

(2) $f(1)=1-3-4\times 0=-2<0$，

$f(3)=3-1-4\ln 3=2-4\ln 3<0$，$f(10)=10-\frac{3}{10}-4\ln 10=\frac{97}{10}-4\ln 10\approx 9.7-4\times 2.303>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上的零点只有一个.

【对点训练】

(1) **解**：$f(x)-g(x)=\cos 2x+e^{-x}-e^x$ ①，

把 x 换成 $-x$ 可得 $f(-x)-g(-x)=\cos(-2x)+e^x-e^{-x}=\cos 2x+e^x-e^{-x}$.

因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(x)=f(-x)$，$g(-x)=-g(x)$，

所以有 $f(-x)-g(-x)=f(x)+g(x)=\cos 2x+e^x-e^{-x}$ ②.

联立①②可得 $f(x)=\cos 2x$，$g(x)=e^x-e^{-x}$.

(2) **证明**：由(1)可知 $h(x)=f(x)+g(x)=\cos 2x+e^x-e^{-x}$，

$h'(x)=-2\sin 2x+e^x+e^{-x}\geqslant -2\sin 2x+2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2-2\sin 2x\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $h(0)=1$，当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，

所以函数 $h(x)$ 有且只有一个零点.

类型 2

例 2 **解**：由题意，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=e^x-a$.

(1) 当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-a>0$ 恒成立，

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，不合题意；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$的极小值也是最小值为 $f(\ln a)=a-a(\ln a+2)=-a(1+\ln a)$.

又当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

所以要使 $f(x)$有两个零点，只要 $f(\ln a)<0$ 即可，则 $1+\ln a>0$，可得 $a>\frac{1}{e}$.

综上，若 $f(x)$有两个零点，则 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【对点训练】

解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{-x}+x$，

所以 $f'(x)=-e^{-x}+1=\frac{e^x-1}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$的极小值点，极小值为 $f(0)=1$，$f(x)$无极大值.

(2)由 $f(x)=e^{-x}+(1-a)x$，得 $f'(x)=-e^{-x}+(1-a)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}$.

①当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{-x}>0$，此时函数 $f(x)$没有零点，符合题意.

②当 $a>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$单调递减.

又 $f(0)=1>0$，且 $f\left(\frac{1}{a-1}\right)=e^{\frac{1}{1-a}}-1<0$，所以函数 $f(x)$有零点，不符合题意.

③当 $a<1$ 时，令 $f'(x)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}=0$，则 $x=-\ln(1-a)$.

当 $x\in(-\infty,-\ln(1-a))$时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$单调递减；当 $x\in(-\ln(1-a),+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(-\ln(1-a))=(1-a)[1-\ln(1-a)]$.

若函数 $f(x)$没有零点，则需 $f(x)_{\min}>0$，即$(1-a)[1-\ln(1-a)]>0$，得 $1-e<a<1$.

综上所述，若函数 $f(x)$无零点，则实数 a 的取值范围为$(1-e,1]$.

迁移应用

类型一

例 1 $(0,10)$ **解析**：由题意构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$，则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}<0$，所以 $g(x)$在定义域内是减函数.因为 $f(1)=1$，所以 $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.由 $f(\lg x)>\frac{\lg x+1}{2}$，得 $f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}$，即 $g(\lg x)=f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}=g(1)$，所以 $\lg x<1$，解得 $0<x<10$.所以原不等式的解集为$(0,10)$.

【对点训练】

A **解析**：令 $g(x)=x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4$，则 $g'(x)=2x\cdot f(x)+x^2f'(x)-x^3=x[2f(x)+xf'(x)-x^2]$.当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)>g(0)$，即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)>g(0)$，即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；当 $x=0$ 时，由题意可得 $2f(0)>0$，所以 $f(0)>0$.综上可知，$f(x)>0$.故选 A.

例 2 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$ **解析**：当 $x<0$ 时，由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，可得$[f(x)\cdot g(x)]'>0$，所以函数 $y=f(x)g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.又由题意可得，函数 $y=f(x)g(x)$为奇函数，所以其图象关于原点对称，且过点$(-3,0)$，$(3,0)$.数形结合可求得不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集为$(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

【对点训练】

C **解析**：构造 $F(x)=e^xf(x)$，则有 $F'(x)=e^x\cdot[f'(x)+f(x)]=e^x\cdot3x^2e^{-x}=3x^2$，故 $F(x)=x^3+c$(c 为常数)，所以 $f(x)=\frac{x^3+c}{e^x}$.又 $f(0)=0$，所以 $c=0$，故 $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$.因为 $f'(x)=\frac{3x^2-x^3}{e^x}=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$，易知 $f(x)$在区间$(-\infty,3]$上单调递增，在$[3,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{27}{e^3}$，无最小值.故选 C.

例 3 A **解析**：令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.由题意知，当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.因为 $f(x)$是奇函数，$f(-1)=0$，所以 $f(1)=-f(-1)=0$，所以 $g(1)=f(1)=0$.所以当 $x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，从而 $f(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，从而 $f(x)<0$.又因为 $f(x)$是奇函数，所以当 $x\in(-\infty,-1)$时，$f(x)>0$；当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)<0$.综上，所求 x 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.故选 A.

【对点训练】

A **解析**：令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$，则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$\frac{f(2\,022)}{2\,022^2}>\frac{f(2\,021)}{2\,021^2}$，所以 $2\,021^2\cdot f(2\,022)>2\,022^2f(2\,021)$.故选 A.

类型二

例 4 (1)**解**：当 $m=0$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$，则 $f'(x)$

$=e^x-\frac{1}{x}$.

又 $f(1)=e$，$f'(1)=e-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y-e=(e-1)(x-1)$，即 $(e-1)x-y+1=0$.

(2)**证明**：当 $m\leqslant 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，

则有 $f(x)=e^x-\ln(x+m)\geqslant e^x-\ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，

故 $f'(x)=0$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$.

【对点训练】

解：由已知得 $f(x)_{\min}\geqslant 0(a>0,x>0)$，

$f'(x)=ae^x-\frac{a+1}{x^2}=\frac{ae^xx^2-(a+1)}{x^2}$.

令 $g(x)=ae^xx^2-(a+1)(a>0,x>0)$，

则 $g'(x)=a(2x+x^2)e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0)=-(a+1)<0$，而 $g(x)=ae^xx^2-(a+1)>ax^2-(a+1)$，

所以 $g\left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)>0$.

存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $ae^{x_0}=\frac{a+1}{x_0^2}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0}+\frac{a+1}{x_0}-2(a+1)=\frac{a+1}{x_0^2}+\frac{a+1}{x_0}-2(a+1)\geqslant 0$，得 $0<x_0\leqslant 1$.

又因为 $g(x)=ae^xx^2-(a+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0<x_0\leqslant 1$，

所以 $0=g(x_0)\leqslant g(1)$，由 $g(1)\geqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{1}{e-1}$.

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e-1},+\infty\right)$.

课后素养评价(一)

基础落实

1.ABC　**解析**:因为一个数列的每一项的值是可以相等的,如常数列,所以 D 项错误,A,B,C 均正确.故选 ABC.

2.CD　**解析**:选项 C,D 既是无穷数列又是递增数列,而选项 A 是递减数列,选项 B 是摆动数列.故选 CD.

3.A　**解析**:对于 A,设 $a_n=\frac{n}{n+1}$,则 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,所以数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是递增数列,故 A 正确;

对于 B,当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 与第一项为 0 不符,故 B 错误;

对于 C,数列中的项并不完全相同,故 C 错误;

对于 D,根据数列的概念,数列与顺序有关,所以数列 2,4,6,8 与数列 8,6,4,2 不是相同的数列,故 D 错误.

故选 A.

4.D　**解析**:因为 $a_n=2n^2-18n+5$,所以设 $f(x)=2x^2-18x+5$,其图象的对称轴为 $x=-\frac{-18}{2\times2}=\frac{9}{2}$,且开口向上.又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $\{a_n\}$ 的最小项为第 4 项或第 5 项.故选 D.

5.B　**解析**:因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,$a_1>0$,则 $a_n>0$,所以 $a_{n+1}<a_n$,故数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.故选 B.

6.A　**解析**:因为 $a_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}$,所以 $a_n-a_{n-1}=\left(2-\frac{2}{n+1}\right)-\left(2-\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}>0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.因此数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.故选 A.

7.n^2-n+1　**解析**:5 个图形中小圆圈的个数分别为 $1,1\times2+1,2\times3+1,3\times4+1,4\times5+1,\cdots$,故第 n 个图形中小圆圈的个数为 $(n-1)\cdot n+1=n^2-n+1$.

8.解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1^2+1}{2\times1-1}=2$;

当 $n=2$ 时,$a_2=\frac{2^2+1}{2\times2-1}=\frac{5}{3}$;

当 $n=3$ 时,$a_3=\frac{3^2+1}{2\times3-1}=2$;

当 $n=4$ 时,$a_4=\frac{4^2+1}{2\times4-1}=\frac{17}{7}$;

当 $n=5$ 时,$a_5=\frac{5^2+1}{2\times5-1}=\frac{26}{9}$.

(2)当 $n=1$ 时,$a_1=(-1)^{1-1}\times\frac{2\times1-1}{3\times1}=\frac{1}{3}$;

当 $n=2$ 时,$a_2=(-1)^{2-1}\times\frac{2\times2-1}{3\times2}=-\frac{1}{2}$;

当 $n=3$ 时,$a_3=(-1)^{3-1}\times\frac{2\times3-1}{3\times3}=\frac{5}{9}$;

当 $n=4$ 时,$a_4=(-1)^{4-1}\times\frac{2\times4-1}{3\times4}=-\frac{7}{12}$;

当 $n=5$ 时,$a_5=(-1)^{5-1}\times\frac{2\times5-1}{3\times5}=\frac{3}{5}$.

能力提升

1.A　**解析**:$a_1=\frac{1+(-1)^{1+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$;

$a_2=\frac{1+(-1)^{2+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$;

$a_3=\frac{1+(-1)^{3+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$;

$a_4=\frac{1+(-1)^{4+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$.故选 A.

2.C　**解析**:$a_1=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$;$a_2=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$;$a_3=3\times\frac{8}{27}=\frac{8}{9}=a_2$;$a_4=4\times\frac{16}{81}=\frac{64}{81}<a_3$.

当 $n\geqslant4$ 时,$a_{n+1}-a_n=(n+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{-n+2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n<0$,所以 $a_{n+1}<a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 中的最大项为第 2 项或第 3 项.故选 C.

3.C　**解析**:由 $a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2^n-1,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 得 $a_2=2^2-1=3$,$a_3=3\times3+1=10$,所以 $a_2a_3=30$.故选 C.

4.BD　**解析**:对于 A,因为 $a_1=a_2=-1$,所以 $a_n=n^2-3n+1$ 时,$\{a_n\}$ 不是递增数列;

对于 B,$a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$,所以 $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 时,$\{a_n\}$ 是递增数列;

对于 C,因为 $a_1=a_2=3$,所以 $a_n=n+\frac{2}{n}$ 时,$\{a_n\}$ 不是递增数列;

对于 D,$a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n+1}{n+2}-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0$,所以 $a_n=\ln\frac{n}{n+1}$ 时,$\{a_n\}$ 是递增数列.故选 BD.

5.2　**解析**:由题意得 $\begin{cases}a_1=a+m=2,\\a_2=a^2+m=4,\end{cases}$

所以 $a^2-a=2$,解得 $a=2$ 或 $a=-1$.

又 $a<0$,所以 $a=-1$.

因为 $a+m=2$,所以 $m=3$.

所以 $a_n=(-1)^n+3$,所以 $a_3=(-1)^3+3=2$.

6.420　**解析**:由数列的前 10 项可知,数列的偶数项的一个通项公式为 $a_{2n}=2n^2$,

所以 $a_{20}=2\times10^2=200$.

奇数项的一个通项公式为 $a_{2n-1}=2n(n-1)$,

所以 $a_{21}=a_{2\times11-1}=2\times10\times11=220$.

所以 $a_{20}+a_{21}=200+220=420$.

7.解:因为 $a_2=\frac{3}{2}$,$a_4=\frac{3}{2}$,代入通项公式中,

可得 $\begin{cases}\frac{3}{2}=2c+\frac{d}{2},\\\frac{3}{2}=4c+\frac{d}{4},\end{cases}$ 解得 $c=\frac{1}{4}$,$d=2$.

所以 $a_n=\frac{n}{4}+\frac{2}{n}$，所以 $a_{10}=\frac{10}{4}+\frac{2}{10}=\frac{27}{10}$.

8.解：(1)$a_n=12n+13$，$b_n=n^2$.

(2)有序号与值都相同的项.令 $a_n=b_n$，即 $12n+13=n^2$，解得 $n=13$ 或 $n=-1$(舍去)，所以两个数列有序号与值都相同的项，是两个数列的第 13 项.

自我超越

2　$\sqrt{n}$

课后素养评价(二)

基础落实

1.D　**解析**：由 $S_n=3n^2+n$，得 $a_9=S_9-S_8=3\times9^2+9-(3\times8^2+8)=52$.故选 D.

2.C　**解析**：数列第一项是 1，A，B 是通项公式的形式，故 A，B 错误；观察数列可知，数列从第二项起，每一项是前一项的 $\frac{1}{2}$，所以递推公式为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，故 C 正确，D 错误.故选 C.

3.A　**解析**：令 $m=n=1$，则 $a_2=a_1\cdot a_1=a_1^2$.

令 $m=1$，$n=2$，则 $a_3=a_1\cdot a_2=a_1^3=8$，解得 $a_1=2$.故选 A.

4.B　**解析**：因为 $a_1=2$，所以 $a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-2}=-1$，$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$，…，所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，则 $a_5=a_2=-1$.故选 B.

5.BC　**解析**：对于 A，从第 2 项起，每一项与前一项的差为 1，通项公式为 $a_n=n$；对于 B，C，从第 2 项起，每一项是前一项的 $\sqrt{2}$ 倍，符合递推公式 $a_n=\sqrt{2}a_{n-1}$；对于 D，不符合递推公式.故选 BC.

6.D　**解析**：由题意可知 $a_3=a_2+3a_1+2=6$，$a_4=a_3+3a_2+2=11$，$a_5=a_4+3a_3+2=31$.故选 D.

7.解：因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2\times1}{1+2}=\frac{2}{3}$，

$a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}$，

$a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{5}$，

$a_5=\frac{2a_4}{a_4+2}=\frac{2\times\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+2}=\frac{1}{3}$.

故该数列的前 5 项分别为 1，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{3}$.

能力提升

1.B　**解析**：当 $n=1$ 时，$S_1=-4$，即 $a_1=-4$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2\times1-6=-4$，上式依然成立，故 $a_n=2n-6(n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $3<2k-6<7$，解得 $\frac{9}{2}<k<\frac{13}{2}$.

又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=5$ 或 $k=6$.故选 B.

2.A　**解析**：由题意得 $a_{n+1}-a_n=n^2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

即 $a_2-a_1=1^2+1-\frac{1}{2}$，$a_3-a_2=2^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，…，$a_6-a_5=5^2+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，

将上面 5 个式子两端分别相加得 $a_6-a_1=(1^2+2^2+\cdots+5^2)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=55+1-\frac{1}{6}=\frac{335}{6}$，且 $a_1=1$，所以 $a_6=\frac{335}{6}+1=\frac{341}{6}$.

故选 A.

3.B　**解析**：当 $n=1$ 时，有 $2a_1=1\times2^1$，所以 $a_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot2^n$，$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(n-1)\cdot2^{n-1}$，

两式相减得 $2^na_n=n\cdot2^n-(n-1)\cdot2^{n-1}=(n+1)2^{n-1}$，

此时，$a_n=\frac{n+1}{2}$，$a_1=1$ 也满足该式，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

故选 B.

4.D　**解析**：由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，得 $a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}$，因此 $k=60$.故选 D.

5.$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant2)$　**解析**：结合题图易知，$a_1=1$，$a_2=3=a_1+2$，$a_3=6=a_2+3$，$a_4=10=a_3+4$，所以 $a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant2)$.

6.$\frac{2}{n(n+1)}$　**解析**：已知 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant3$ 时，$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，即 $n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=a_n$，进而得 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$.因为 $n\geqslant3$，所以 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant3)$，故 $\frac{a_n}{a_2}=\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant3)$.因为 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=4a_2$，又 $a_1=1$，解得 $a_2=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{a_n}{\frac{1}{3}}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant3)$.所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant3)$.又 $a_1=1=\frac{2}{1\times2}$，$a_2=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times3}$ 满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

7.解：(1)由已知可得 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{5}$，$a_4=$

$\frac{1}{7}$，$a_5=\frac{1}{9}$.

(2)由(1)可得数列$\{a_n\}$中的每一项的分子均为1，分母依次为1,3,5,7,9,…，所以它的一个通项公式为$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

(3)实数$\frac{1}{99}$是这个数列中的一项.令$\frac{1}{99}=\frac{1}{2n-1}$，解得$n=50$，故$\frac{1}{99}$是这个数列的第50项.

自我超越

1.C **解析**：由题意得$a_{2n+2}=a_{2n+1}+2=a_{2n}-1+2=a_{2n}+1$，$a_{2n+1}=a_{2n}-1=a_{2n-1}+2-1=a_{2n-1}+1$.又$a_1=1$，所以可将数列$\{a_n\}$写出为1,3,2,4,3,5,4,6,5,7,6,8,7,9,8,10,….容易看出，满足$|a_n-n|\leqslant 4$的n的最大值是12.故选C.

2.(1)解：$a_7=\frac{7^2}{7^2+1}=\frac{49}{50}$.

(2)证明：因为$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}$，

所以$0<a_n<1$，故此数列的各项都在区间$(0,1)$内.

(3)解：区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有数列$\{a_n\}$中的项.

令$\frac{1}{3}<\frac{n^2}{n^2+1}<\frac{2}{3}$，则$\frac{1}{2}<n^2<2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以$n=1$，即在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有且只有1项数列$\{a_n\}$中的项，为$a_1$.

微专题培优集训(一)

1.C **解析**：已知$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则$a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，$a_5=2a_4+1=31$.故选C.

2.C **解析**：因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$，$a_1=1$，所以$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n}{n+2}$，则$\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，即$a_{n+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，所以$a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 2)$.又$a_1=1$，满足上式，所以$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$\{a_n\}$的前7项和为$2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{4}$.故选C.

3.B **解析**：由题意得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=1+\frac{1}{a_n}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$.又$a_1=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$为首项，1为公差的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times 1=\frac{2n-1}{2}$，所以$a_n=\frac{2}{2n-1}$，$a_6=\frac{2}{2\times 6-1}=\frac{2}{11}$.故选B.

4.C **解析**：因为$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\ln(n+1)-\ln n$.当$n\geqslant 2$时，

$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}\right)+\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)=2+(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln n-\ln(n-1)]=2+\ln n$，所以$a_n=2n+n\ln n$.显然，$a_1=2$满足上式，所以$a_n=2n+n\ln n$.故选C.

5.$\frac{n+2}{3^n}$ **解析**：因为$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\geqslant 2)$，所以$3^n a_n=3^{n-1}a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，即$3^n a_n-3^{n-1}a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$.又$a_1=1$，$3^1\cdot a_1=3$，所以数列$\{3^n a_n\}$是以3为首项，1为公差的等差数列，所以$3^n a_n=3+(n-1)\times 1=n+2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n+2}{3^n}$.

6.$\frac{1}{4n-3}$ **解析**：因为$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=4+\frac{1}{a_n}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=4$.又$\frac{1}{a_1}=1$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以1为首项，4为公差的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=1+4(n-1)=4n-3$，所以$a_n=\frac{1}{4n-3}$.

7.$\frac{1}{2n-1}$ **解析**：因为$a_n=a_{n+1}+2a_n a_{n+1}$，$a_2=\frac{1}{3}$，所以令$n=1$，得$a_1=a_2+2a_1a_2$，解得$a_1=1$.由$a_n=a_{n+1}+2a_n a_{n+1}$两边同时除以$a_n a_{n+1}$，得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，又因为$\frac{1}{a_1}=1$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为1，公差为2的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

8.$\frac{1}{n}$ **解析**：由$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}\cdot a_n=0$，得$[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$.又数列$\{a_n\}$为正项数列，即$a_n>0$，则$a_{n+1}+a_n>0$，

所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=0$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，所以$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$.当$n=1$时，上式也成立，所以$a_n=\frac{1}{n}$.

9.解：因为数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$2S_n=a_{n+1}+2n-4$，

所以当$n\geqslant 2$时，$2S_{n-1}=a_n+2n-6$，

两式相减可得$2S_n-2S_{n-1}=a_{n+1}+2n-4-(a_n+2n-6)$，即$2a_n=a_{n+1}-a_n+2$，

即$a_{n+1}=3a_n-2$，可得$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，即$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$.

当$n=1$时，$2a_1=a_2+2-4$，所以$a_2=10$，所以$\frac{a_2-1}{a_1-1}=\frac{10-1}{4-1}=3$，

所以数列$\{a_n-1\}$是以3为首项，3为公比的等比数列，

所以 $a_n-1=3^n$，即 $a_n=3^n+1$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n+1$.

课后素养评价(三)

基础落实

1.C　**解析**：由 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，所以 a，b 的等差中项为 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$. 故选 C.

2.D　**解析**：在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，则 $a_5=3+2\times4=11$. 故选 D.

3.ABD　**解析**：A，B，D 均满足等差数列的定义，是等差数列；

C 中，因为 $2^4-2^5\neq2^3-2^4\neq2^2-2^3$，不满足等差数列的定义，所以不是等差数列. 故选 ABD.

4.B　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $2a_3+5a_{10}=70$，所以 $2(a_1+2d)+5(a_1+9d)=70$，化简得 $7a_1+49d=70$，即 $a_1+7d=10$，所以 $a_8=a_1+7d=10$. 故选 B.

5.C　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，由题意得 $a_1+(m-1)d=a_1+15d-(a_1+4d)+(a_1+2d)\Rightarrow m-1=13\Rightarrow m=14$. 故选 C.

6.B　**解析**：由题意，在新等差数列中，首项为 8，第 9 项为 2，所以新公差 $d'=\dfrac{2-8}{9-1}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}$. 故选 B.

7.C　**解析**：由 $37-40=-3$ 可知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 -3，又首项为 40，则通项公式为 $a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=43-3n$. 令 $43-3n<0$，解得 $n>\dfrac{43}{3}$，故第一个负数项是第 15 项. 故选 C.

8.BCD　**解析**：A 选项中，给出数列的有限项不一定可以唯一确定通项公式；B 选项中，由等差数列的函数特性，知 $d>0$ 时 $\{a_n\}$ 必是递增数列；C 选项中，$a=b=c=1$ 时，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=1$，此时 $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ 成等差数列；D 选项中，设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，所以 $a_n+2a_{n+1}=a_1+(n-1)d+2a_1+2nd=3a_1+(3n-1)d$，$\{a_n+2a_{n+1}\}$ 也是等差数列. 故选 BCD.

9.解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

(1)由 $a_5=4$，$a_{10}=-9$，

得 $\begin{cases}a_1+4d=4,\\a_1+9d=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{72}{5},\\d=-\dfrac{13}{5}.\end{cases}$

所以 $a_{20}=a_1+19d=-35$.

(2)因为 $a_5-a_3=12$，所以公差 $d=6$. 又 $a_{12}=20$，所以 $a_1+11d=20$，解得 $a_1=-46$. 所以 $a_1=-46$，$d=6$.

(3)因为 $a_4-a_3=8$，所以 $d=8$.

又因为 $a_3a_4=-7$，所以 $a_3(a_3+8)=-7$，解得 $a_3=-1$ 或 $a_3=-7$.

当 $a_3=-1$ 时，$a_7=a_3+4d=31$；

当 $a_3=-7$ 时，$a_7=a_3+4d=25$.

综上，a_7 的值为 31 或 25.

能力提升

1.B　**解析**：由已知得 $a_n=a_1+(n-1)d=70+(n-1)\times(-9)=79-9n$，

所以 $a_8=7$，$a_9=-2$，$a_{10}=-11$，故绝对值最小的一项为 a_9. 故选 B.

2.D　**解析**：因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且满足 $a_1=1$，$\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

所以 $\dfrac{1}{a_n^2}=1+(n-1)=n$，解得 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

所以 $a_{1\,024}=\dfrac{1}{\sqrt{1\,024}}=\dfrac{1}{32}$. 故选 D.

3.4 049　**解析**：设 $\triangle ABC$ 内有 n 个点时，小三角形有 a_n 个.

现增加一个点，则此点必落入某一个小三角形内，

且此点与小三角形三个顶点的连线把此小三角形分成三个小三角形，故三角形总数多出了两个，即 $a_{n+1}=a_n+2$.

因此数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$，于是 $a_{2\,024}=2\times2\,024+1=4\,049$.

4.10　**解析**：由 $a_1=2$，$a_{m+n}=a_m+a_n$，令 $m=1$，则 $a_{n+1}-a_n=a_1=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，即 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$.

又 k 为正整数，所以 $a_ka_{k+1}=2k\times2(k+1)=440$，即 $k(k+1)=110$，解得 $k=10$ 或 $k=-11$(舍去).

5.$a_n=n\cdot2^n$　**解析**：由 $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$ 得 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=1$，且 $\dfrac{a_1}{2}=1$，故 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列，首项为 1，公差为 1，

所以 $\dfrac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，所以 $a_n=n\cdot2^n$.

6.(1)**解**：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$，

所以 $a_3=2a_2-a_1+2=2\times2-1+2=5$，$a_4=2a_3-a_2+2=2\times5-2+2=10$.

(2)**证明**：因为 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$，

所以 $\{b_n\}$ 为等差数列.

自我超越

1.D　**解析**：由题意，知五种规格党旗的长 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5(单位：cm)成等差数列，设公差为 d，因为 $a_1=288$，$a_5=96$，可得 $d=\dfrac{a_5-a_1}{5-1}=\dfrac{96-288}{4}=-48$，可得 $a_3=288+(3-1)\times(-48)=192$. 又党旗的长与宽之比为定值，且 $b_1=192$，所以 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_3}{b_3}$，所以 $b_3=\dfrac{a_3\cdot b_1}{a_1}=\dfrac{192\times192}{288}=128$. 故选 D.

2.ABC　**解析**：由题意知 $\begin{cases}a_1=2-2d>0,\\d>0,\end{cases}$ 解得 $0<$

$d<1$.

$a_2\cdot a_4=(2-d)\cdot(2+d)=4-d^2<4$，A 正确；

$a_2^2+a_4=(2-d)^2+(2+d)=d^2-3d+6=\left(d-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>\frac{15}{4}$，B 正确；

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{1}{2-2d}+\frac{1}{2+2d}=\frac{1}{1-d^2}>1$，C 正确；

$a_1\cdot a_5-a_2\cdot a_4=(2-2d)\cdot(2+2d)-(2-d)\cdot(2+d)=-3d^2<0$，所以 $a_1\cdot a_5<a_2\cdot a_4$，D 错误.

故选 ABC.

课后素养评价(四)

基础落实

1.B **解析**：已知等差数列$\{a_n\}$，则 $a_1+a_5+a_9=3a_5=12$，可得 $a_5=4$.故选 B.

2.D **解析**：由等差数列的性质可知，$a_4+a_{10}=2a_7$，所以 $2a_7+\frac{1}{2}a_7=10$，解得 $a_7=4$，所以 $a_3+a_{11}=2a_7=8$.

故选 D.

3.B **解析**：在 a 和 b 两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列，则这个数列共有$(n+2)$项.设该数列的公差为 d，则 $d=\frac{b-a}{(n+2)-1}=\frac{b-a}{n+1}$.故选 B.

4.BC **解析**：在等差数列$\{a_n\}$中，因为 $a_1+a_2+a_3=21$，所以 $3a_2=21$，所以 $a_2=7$.因为 $a_1=3$，所以 $d=7-3=4>0$，

所以数列$\{a_n\}$为递增数列，$a_4=a_2+2d=15$，所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4=45$.故选 BC.

5.A **解析**：由题意，设 A 所得为 $a-4d$，B 所得为 $a-3d$，C 所得为 $a-2d$，D 所得为 $a-d$，E 所得为 a，则 $\begin{cases}5a-10d=5,\\2a-7d=3a-3d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\d=-\frac{1}{6}.\end{cases}$ 故 E 所得为 $\frac{2}{3}$ 钱.故选 A.

6.18 **解析**：设等差数列的公差为 d，由题意得 $\begin{cases}a_3+a_7=2a_5=20,\\a_8=a_5+3d=4,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_5=10,\\d=-2,\end{cases}$ 所以 $a_1=a_5-4d=18$.

7.21 **解析**：由 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，知数列$\{a_n\}$是等差数列.

由等差数列的性质，得 $a_2+a_8=2a_5$，所以 $a_8=2a_5-a_2=2\times 13-5=21$.

8. **解**：(1) 因为 $a_3+a_7=a_4+a_6=16$，所以 $\begin{cases}a_3a_7=55,\\a_3+a_7=16,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_3=5,\\a_7=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_3=11,\\a_7=5.\end{cases}$

又因为数列$\{a_n\}$为递增数列，所以 $a_3=5$，$a_7=11$.

(2)设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$，

由 $a_3=5$，$a_7=11$，可得 $\begin{cases}a_1+2d=5,\\a_1+6d=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=\frac{3}{2},\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$.

能力提升

1.B **解析**：设相邻两个节气晷长减少或增加的量为 $d(d>0)$，则立冬到冬至晷长增加 $3d$，冬至到雨水晷长减少 $4d$.设冬至的晷长为 x 尺，则 $\begin{cases}x-4d=9.5,\\10.5+3d=x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=1,\\x=13.5.\end{cases}$ 故选 B.

2.ABD **解析**：因为点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$都在直线 $3x-y-24=0$ 上，所以 $3n-a_n-24=0$，所以 $a_n=3n-24$，所以数列$\{a_n\}$为等差数列，且 $a_8=0$，$a_7=-3$，$a_9=3$.所以由等差数列的性质可得 $a_7+a_9=2a_8=0$，且 $a_7\cdot a_9=-9\neq 0$.故选 ABD.

3.C **解析**：根据等差数列的性质可得 $m+p=10$，则 $(m+2)+p=12$，

所以 $\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}=\frac{1}{12}\left(\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}\right)(m+2+p)=\frac{1}{12}\left(5+\frac{4p}{m+2}+\frac{m+2}{p}\right)\geqslant\frac{1}{12}\left(5+2\sqrt{\frac{4p}{m+2}\cdot\frac{m+2}{p}}\right)=\frac{3}{4}$.

当且仅当 $\frac{4p}{m+2}=\frac{m+2}{p}$，即 $p=4$，$m=6$ 时，等号成立.故选 C.

4.ABD **解析**：因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$，即 $a_2^2+a_9^2=20$.

对于 A，$a_2a_9\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=\frac{20}{2}=10$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，故选项 A 正确；

对于 B，由于$\left(\frac{a_2+a_9}{2}\right)^2\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$，所以$\frac{a_2+a_9}{2}\leqslant\sqrt{10}$，$a_2+a_9\leqslant 2\sqrt{10}$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，故选项 B 正确；

对于 C，$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}=\frac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2a_9^2}=\frac{20}{a_2^2a_9^2}\geqslant\frac{20}{\left(\frac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\frac{20}{10^2}=\frac{1}{5}$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$，故选项 C 错误；

对于 D，结合 A 选项的结论，有 $a_2^4+a_9^4=(a_2^2+a_9^2)^2-2a_2^2a_9^2=400-2a_2^2a_9^2\geqslant 400-2\times 10^2=200$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，故选项 D 正确.故选 ABD.

5.100 **解析**：因为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，

所以$\{a_n+b_n\}$是等差数列.

因为 $a_1+b_1=100$，$a_2+b_2=100$，

所以数列$\{a_n+b_n\}$的公差 $d=0$，所以 $a_{37}+b_{37}=100$.

6.(1) **解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_2+a_4=2a_3$，$a_2+2a_3+a_4=4a_3=12$，

所以 $a_3=3$.

因为 $a_3=a_1+2d$，即 $1+2d=3$，所以 $d=1$.

所以 $a_5+a_7=2a_1+10d=12$.

(2)**证明**:由(1)可知 $a_n=n$,

所以 $b_n=a_{2n}-1=2n-1$.

因为 $b_n-b_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2(n\geqslant 2)$,

$b_1=a_2-1=1$,

所以数列$\{b_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列.

自我超越

1.B　**解析**:因为圆 O 的半径为 5,$OP=3$,过点 P 的 2 021 条弦的长度组成一个等差数列$\{a_n\}$,最短弦长为 $a_1=2\times\sqrt{5^2-3^2}=8$,最长弦为过点 P 的直径,则 $a_{2\,021}=2\times5=10$,所以公差 $d=\dfrac{a_{2\,021}-a_1}{2\,020}=\dfrac{10-8}{2\,020}=\dfrac{1}{1\,010}$.故选 B.

2.(1)**证明**:由题意知,$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$,$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$,

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$.

由于 $a_{n+1}\neq0$,所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2)**解**:存在.理由如下:

由题意知,$a_1=1$,$a_1a_2=\lambda S_1-1$,可得 $a_2=\lambda-1$.

由(1)知,$a_3=\lambda+1$.

令 $2a_2=a_1+a_3$,

解得 $\lambda=4$.

故 $a_{n+2}-a_n=4$,由此可得

$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1,公差为 4 的等差数列,$a_{2n-1}=4n-3$;

$\{a_{2n}\}$是首项为 3,公差为 4 的等差数列,$a_{2n}=4n-1$.

所以 $a_n=2n-1$,$a_{n+1}-a_n=2$.

因此存在实数 $\lambda=4$,使得数列$\{a_n\}$为等差数列.

课后素养评价(五)

基础落实

1.C　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意可得 $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=12$,解得 $a_2=4$,所以公差 $d=a_2-a_1=4-2=2$,所以 $a_6=a_1+5d=2+5\times2=12$.故选 C.

2.BD　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意可得 $\begin{cases}3(a_1+d)=0,\\a_1+3d=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-2,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=-2+2(n-1)=2n-4$,$S_n=-2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-3n$.故选 BD.

3.B　**解析**:由 $S_{10}=100$,得 $\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=100$,而 $a_{10}=19$,解得 $a_1=1$,公差 $d=\dfrac{a_{10}-a_1}{10-1}=2$,所以 $S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times(20-1)}{2}d=400$.故选 B.

4.A　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $S_4=2(S_2+S_3)$,$a_1=1$,得 $4+6d=2(2+d+3+3d)$,解得 $d=-3$,所以 $a_6=1+(6-1)d=-14$.故选 A.

5.B　**解析**:由题意知 $a_1+a_2+a_3+a_4=40$,$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=80$,两式相加整理得 $a_1+a_n=30$.又因为 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{30n}{2}=210$,所以 $n=14$.故选 B.

6.99　**解析**:在等差数列$\{a_n\}$中,由 $a_1+a_4+a_7=39$,$a_3+a_6+a_9=27$,两式相加可得 $a_1+a_4+a_7+a_3+a_6+a_9=66$.

由等差数列的性质可得 $a_1+a_9=a_4+a_6=a_7+a_3=2a_5$,

故可得 $6a_5=66$,解得 $a_5=11$,故 $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=99$.

7.210　**解析**:因为 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列,

即 30,70,S_9-100 成等差数列,

所以 $140=30+S_9-100$,所以 $S_9=210$.

8.-11　**解析**:由题意知,$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,首项为 $\dfrac{a_1}{1}=-11$.

设其公差为 d,则 $\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2d=2$,所以 $d=1$,

所以 $\dfrac{S_{11}}{11}=-11+10\times1=-1$.所以 $S_{11}=-11$.

9.**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

(1)因为 $a_1+a_3=2a_2=6$,所以 $a_2=3$,

所以 $d=\dfrac{a_9-a_2}{9-2}=\dfrac{17-3}{9-2}=2$,

则 $a_n=a_2+(n-2)d=3+(n-2)\times2=2n-1$.

(2)由(1)可得 $a_1=1$,

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=n^2$.

能力提升

1.B　**解析**:设公差为 d,因为 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$3S_3=S_2+S_4$,$a_1=2$,所以 $3\times\left(3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d\right)=a_1+a_1+d+4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d$,可得 $d=-3$,所以 $a_5=2+4\times(-3)=-10$.故选 B.

2.ACD　**解析**:对于 A,$a_3+a_7=4$,$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9(a_3+a_7)}{2}=18$,故 A 正确;

对于 B,$S_{15}=\dfrac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$,则 $a_8>0$,$S_{16}=\dfrac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_8+a_9)<0$,则 $a_8+a_9<0$,$a_9<-a_8<0$,

因此 $a_8^2-a_9^2=(a_8+a_9)(a_8-a_9)<0$,即 $a_8^2<a_9^2$,故 B 错误;

对于 C,$a_5+a_6=2(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=13$,则 $a_7+a_8=2(a_5+a_6)-(a_3+a_4)=17$,故 C 正确;

对于 D,设$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_8=S_{10}$,得 $a_1+7d=10a_1+45d$,解得 $d=-\dfrac{9}{38}a_1$,

则 $S_9=9a_1+36d=9\left(a_1-\dfrac{18}{19}a_1\right)>0$,

$S_{10}=10a_1+45d=5\left(2a_1-\dfrac{81}{38}a_1\right)<0$,故 D 正确.

故选 ACD.

3.ACD　**解析**:设$\{a_n\}$的公差为 d.

对于 A,$S_6=6a_1+15d$,$3(S_4-S_2)=3[4a_1+6d-(2a_1+d)]=6a_1+15d$,所以 $S_6=3(S_4-S_2)$,故 A 正确;

对于 B，$S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d=15a_1+105d$，$5(a_4+a_8+a_k)=5[a_1+3d+a_1+7d+a_1+(k-1)d]=15a_1+5(k+9)d$，

又因为 $d\neq0$，所以 $S_{15}=5(a_4+a_8+a_k)\Leftrightarrow105=5(k+9)$，解得 $k=12$，故 B 错误；

对于 C，$S_{2n}=2na_1+\frac{2n\times(2n-1)}{2}\times d=2na_1+(2n^2-n)d$，$S_{4n}=4na_1+\frac{4n\times(4n-1)}{2}\times d=4na_1+(8n^2-2n)d$，$S_{6n}=6na_1+\frac{6n\times(6n-1)}{2}\times d=6na_1+(18n^2-3n)d$，

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2na_1+(2n^2-n)d+6na_1+(18n^2-3n)d-[4na_1+(8n^2-2n)d]=4na_1+(12n^2-2n)d$，$S_{4n}-S_{2n}=4na_1+(8n^2-2n)d-[2na_1+(2n^2-n)\cdot d]=2na_1+(6n^2-n)d$，

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2(S_{4n}-S_{2n})$，所以 S_{2n}，$S_{4n}-S_{2n}$，$S_{6n}-S_{4n}$ 成等差数列，故 C 正确；

对于 D，因为 $\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{2na_1+(2n^2-n)d}{2n}=a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d$，所以 $\frac{S_{2(n+1)}}{2(n+1)}-\frac{S_{2n}}{2n}=\left[a_1+\left(n+1-\frac{1}{2}\right)d\right]-\left[a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right]=d$，所以 $\left\{\frac{S_{2n}}{2n}\right\}$ 是公差为 d 的等差数列，故 D 正确.

故选 ACD.

4.5　**解析**：因为 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，而 $S_3=9$，$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=7$，所以 $S_9-S_6=5$.

5.解：因为 $S_4-2a_2a_3+6=0$，$a_1=-1$，

所以 $-4+6d-2(-1+d)(-1+2d)+6=0$，

整理得 $d^2-3d=0$.

又 $d>1$，所以 $d=3$，

所以 $a_n=3n-4$，

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{3n^2-5n}{2}$.

6.解：由题意得 $a_2+a_4=a_1+a_5=48$，因为 $a_5=28$，

所以 $a_1=20$，则公差 $d=\frac{28-20}{5-1}=2$，

所以 $S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+19)$.

由 $n(n+19)+30>n\lambda$，得 $\lambda<\frac{n^2+19n+30}{n}=n+\frac{30}{n}+19$ 恒成立.

设 $f(x)=x+\frac{30}{x}+19$，令 $x=\frac{30}{x}$，解得 $x=\pm\sqrt{30}$.

易知当 $x\in(0,\sqrt{30})$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\sqrt{30},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增.

又因为 $5<\sqrt{30}<6$，$f(5)=f(6)=30$，

所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，$n+\frac{30}{n}+19$ 取得最小值 30，

所以 $\lambda<30$，即 λ 的取值范围是 $(-\infty,30)$.

自我超越

1.35　**解析**：设对 324 的 18 项划分中最小的项为 a_1，最大的项为 a_{18}，

则 $\begin{cases}a_{18}=a_1+17\times2,\\ \frac{18(a_1+a_{18})}{2}=324,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ a_{18}=35.\end{cases}$

2.解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}2a_1+d=2,\\ 3a_1+\frac{3\times2}{2}d=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\ d=-6,\end{cases}$

所以 $a_n=4-6(n-1)=10-6n$，

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=7n-3n^2$.

(2)存在.$S_n+S_{n+3}=7n-3n^2+7(n+3)-3(n+3)^2=-6n^2-4n-6$，

$S_{n+2}=7(n+2)-3(n+2)^2=-3n^2-5n+2$，

$2(S_{n+2}+2n)=2(-3n^2-5n+2+2n)=-6n^2-6n+4$.

若存在 n，使 S_n，$S_{n+2}+2n$，S_{n+3} 成等差数列，

则 $-6n^2-4n-6=-6n^2-6n+4$，解得 $n=5$.

所以存在 $n=5$，使 S_n，$S_{n+2}+2n$，S_{n+3} 成等差数列.

课后素养评价(六)

基础落实

1.B　**解析**：由 $a_n=4n-17$，得当 $1\leqslant n\leqslant4$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n<0$，当 $n\geqslant5$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n>0$，所以当 S_n 取得最小值时，$n=4$.故选 B.

2.A　**解析**：项数为 $2m+1$ 的数列 $\{a_n\}$ 中奇数项共有 $(m+1)$ 项，其和为 $\frac{(m+1)(a_1+a_{2m+1})}{2}=\frac{(m+1)2a_{m+1}}{2}=(m+1)\cdot a_{m+1}=140$，

项数为 $2m+1$ 的数列 $\{a_n\}$ 中偶数项共有 m 项，其和为 $\frac{m(a_2+a_{2m})}{2}=\frac{m\cdot2a_{m+1}}{2}=ma_{m+1}=120$，

所以 $\frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}}=\frac{140}{120}=\frac{7}{6}$，解得 $m=6$.

故选 A.

3.D　**解析**：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，由 $S_7=5a_5$，可得 $7a_1+\frac{7\times6}{2}d=5(a_1+4d)$，即 $7+21d=5+20d$，解得 $d=-2$.故选 D.

4.BD　**解析**：因为 $S_n=n^2-4n+1$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2-4\times1+1=-2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n+1-[(n-1)^2-4(n-1)+1]=2n-5(n\geqslant2)$，显然当 $n=1$ 时，$a_n=2n-5$ 不成立，

所以 $a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\ 2n-5,n\geqslant2,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 从第二项起是以 2 为公差的等差数列，

故数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列，故 A 错误，B 正确.

数列 $\{a_n\}$ 从第二项起为递增的等差数列，又 $a_1<a_2$，

所以 a_1 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项，故 C 错误.

因为 $a_1<a_2<0<a_3<\cdots<a_{10}$，所以

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-a_1-a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}-2(a_1+a_2)=-2+(-1)\times9+\frac{9\times8}{2}\times2-2\times(-2-1)$

$=67$，故 D 正确.

故选 BD.

5.D　**解析**：设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=\frac{n[7+(-2n+9)]}{2}=8n-n^2$. 因为当 $n\leqslant 4$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 5$ 时，$a_n<0$，所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+\cdots+a_{12})=S_4-(S_{12}-S_4)=2S_4-S_{12}=80$. 故选 D.

6.6 或 7　**解析**：因为 $d>0$，$|a_5|=|a_9|$，所以 $a_5<0$，$a_9>0$，$-a_5=a_9$，即 $a_5+a_9=2a_7=0$.

所以 $a_7=0$，所以 $a_6<0$，$a_8>0$.

所以 $S_6=S_7$，为最小.

故使得前 n 项和 S_n 取得最小值的正整数 n 的值为 6 或 7.

7.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

依题意有$\begin{cases}2a_1+3d=8,\\ a_1+4d=3a_1+3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2)因为 $b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}$.

令 $1-\frac{1}{2n+1}>\frac{2\,024}{2\,025}$，解得 $n>1\,012$，故 $n=1\,013$.

能力提升

1.B　**解析**：由$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{3n-1}$，设 $S_n=n(2n+1)k$，$T_n=n(3n-1)k$，则 $a_7=S_7-S_6=105k-78k=27k$，$b_5=T_5-T_4=70k-44k=26k$，则$\frac{a_7}{b_5}=\frac{27k}{26k}=\frac{27}{26}$. 故选 B.

2.BC　**解析**：因为 d，S_n 分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前 n 项和，$S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$，

解得 $a_1=-\frac{29}{2}d$，

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{29}{2}nd+\frac{d}{2}n^2-\frac{d}{2}n=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d$.

若 $d>0$，当 $n=15$ 时，S_n 取得最小值；若 $d<0$，当 $n=15$ 时，S_n 取得最大值，故 A 错误.

当 $n=30$ 时，$S_n=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d=0$，故 B 正确.

当 $d>0$ 时，$a_{10}+a_{22}=2a_1+30d=d>0$，故 C 正确.

当 $d<0$ 时，$|a_{10}|=|a_1+9d|=-\frac{11}{2}d$，

$|a_{22}|=|a_1+21d|=-\frac{13}{2}d$，

所以$|a_{10}|<|a_{22}|$，故 D 错误.

故选 BC.

3.ACD　**解析**：对于 A，由已知$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1$ 可得，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是一个等差数列，首项$\frac{S_1}{1}=32$，公差为 -1，

所以$\frac{S_n}{n}=32+(n-1)\times(-1)=-n+33$，

所以 $S_n=-n^2+33n$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=32$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+33n+(n-1)^2-33(n-1)=-2n+34$.

当 $n=1$ 时，$-2\times 1+34=32=a_1$，满足上式.

综上所述，$a_n=-2n+34$.

所以，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=-2n+34+2(n-1)-34=-2$，所以$\{a_n\}$是等差数列，故 A 正确.

对于 B，设$\{a_n\}$的公差为 d，

由选项 A 知，$a_1=32$，$d=-2$，根据等差数列前 n 项和的性质可知，S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，$S_9-S_6-(S_6-S_3)=S_6-S_3-S_3=3\times 3d=-18$，故 B 错误.

对于 C，因为 $a_1=32>0$，$d=-2<0$，

要使 S_n 取得最大值，则应有$\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\ a_{n+1}\leqslant 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-2n+34\geqslant 0,\\ -2(n+1)+34\leqslant 0,\end{cases}$解得 $16\leqslant n\leqslant 17$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=16$ 或 $n=17$ 时，S_n 取得最大值. 故 C 正确.

对于 D，由选项 A 知，$S_n=-n^2+33n$，

令 $-n^2+33n\geqslant 0$，可得 $0\leqslant n\leqslant 33$.

所以，当 $S_n\geqslant 0$ 时，n 的最大值为 33. 故 D 正确.

故选 ACD.

4. AD　**解析**：由 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$，得$a_6>0$.

又 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$，得 $a_6+a_7<0$，

所以 $a_6>0$，$a_7<0$，数列$\{a_n\}$是递减数列，其前 6 项为正数，从第 7 项起均为负数.

由以上分析可知，公差 $d<0$，故 A 正确；$a_7<0$，故 B 错误；前 6 项和最大，故 C 错误；

由 $a_4>0$，$a_9<0$，有$|a_4|-|a_9|=a_4+a_9=a_6+a_7<0$，则$|a_4|<|a_9|$，故 D 正确.

故选 AD.

5.$\frac{13}{22}$　**解析**：依题意可得$\frac{a_4}{b_4}=\frac{2a_4}{2b_4}=\frac{a_1+a_7}{b_1+b_7}=\frac{\frac{7}{2}(a_1+a_7)}{\frac{7}{2}(b_1+b_7)}=\frac{S_7}{T_7}=\frac{2\times 7-1}{3\times 7+1}=\frac{13}{22}$.

6.(1)**证明**：由已知，得 $2S_n=a_n^2+a_n$，且 $a_n>0$.

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1^2+a_1$，解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，

所以 $2S_n-2S_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

即 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$.

因为 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$.

故数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_n=n$.

(2)**解**：由(1)可知 $a_n=n$.设 $c_n=a_n\cdot b_n$，

则 $c_n=n(-n+5)=-n^2+5n=-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，c_n 的最大值为 6.

故 $a_n\cdot b_n$ 的最大值为 6，此时 $n=2$ 或 $n=3$.

7.(1)**解**：因为 $a_1=1$，所以 $S_1=a_1=1$，所以 $\frac{S_1}{a_1}=1$.

因为 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，

所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，所以 $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

整理得 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

又 $a_n\neq 0$，

则 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

所以 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，即 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

显然上式对于 $n=1$ 也成立，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**：由(1)得 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

自我超越

1.B　**解析**：因为 $S_{15}=15\times\frac{a_1+a_{15}}{2}=15a_8>0$，$S_{16}=16\times\frac{a_1+a_{16}}{2}=8(a_8+a_9)<0$，所以 $a_8>0$，$a_9<0$，所以 $\frac{S_1}{a_1}>0,\cdots,\frac{S_8}{a_8}>0$，后面的项都小于零.由于 $S_1<S_2<\cdots<S_8$，$a_1>a_2>\cdots>a_8>0$，所以最大项为 $\frac{S_8}{a_8}$.故选 B.

2.$\frac{2\,024}{2\,025}$　**解析**：设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_a，d_b.

由已知得 $a_{15}-a_3=12d_a=12$，$b_7-b_1=6d_b=12$，

所以 $d_a=1$，$d_b=2$.

所以 $a_n=a_3+(n-3)d_a=n$，$b_n=b_1+(n-1)d_b=2n+1$.

所以 $c_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 2 024 项和 $c_1+c_2+\cdots+c_{2\,024}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,023}+\frac{1}{2\,024}\right)-\left(\frac{1}{2\,024}+\frac{1}{2\,025}\right)=1-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,024}{2\,025}$.

课后素养评价(七)

基础落实

1.A　**解析**：因为 $4+\sqrt{15}$，m，$4-\sqrt{15}$ 成等比数列，所以由等比数列的性质得 $m^2=(4+\sqrt{15})\times(4-\sqrt{15})=1$，解得 $m=\pm 1$.故选 A.

2.B　**解析**：由题意知首项 $a_1=\frac{a_4}{q^3}=-1$.故选 B.

3.A　**解析**：由已知数列 $a_n=(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 5 项为 $-1,1,-1,1,-1$，明显数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列，也不是单调递增数列，也不是单调递减数列，排除 B,C,D.又当 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{Z}$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}=-1$ 为常数，故数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.故选 A.

4.C　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q^6=\frac{a_8}{a_2}=8$，可得 $q^2=2$，所以 $a_{12}=a_8q^4=24\times 2^2=96$.故选 C.

5.ABD　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

对于 A，由 $\begin{cases}a_3+a_4=40,\\a_3-a_5=30,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_3+a_3q=40,\\a_3-a_3q^2=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=\frac{1}{4},\\a_3=32,\end{cases}$ 故 A 正确；

对于 B，$a_{2\,025}=a_{2\,023}q^2=\frac{1}{16}a_{2\,023}$，则 $a_{2\,023}=16a_{2\,025}$，故 B 正确；

对于 C，$a_n=a_3q^{n-3}=2^{11-2n}$，当 $n\geqslant 6$ 时，$11-2n\leqslant -1$，则 $a_n\leqslant 2^{-1}=\frac{1}{2}$，故 C 错误；

对于 D，由 $a_5a_6=2\times\frac{1}{2}=1$，可得 $\{a_n\}$ 的前 10 项积为 $(a_5a_6)^5=1$，故 D 正确.

故选 ABD.

6.B　**解析**：1，m，9 成等比数列，等价于 $m^2=1\times 9$，解得 $m=\pm 3$.

而“$m=3$”是“$m=\pm 3$”的充分不必要条件，

所以“$m=3$”是“1，m，9 成等比数列”的充分不必要条件.

故选 B.

7.C　**解析**：若 a,b,c,d 成等比数列，设公比为 q，则 a,b,c,d 均不为 0，且 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=q$，

则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{d^2}{c^2}=q^2$，故 a^2,b^2,c^2,d^2 成等比数列，且公比为 q^2；

$\frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}=q^2$，$\frac{cd}{bc}=\frac{d}{b}=q^2$，因此 ab,bc,cd 成等比数列，且公比为 q^2；

$a-b=a(1-q)$，$b-c=b(1-q)=aq(1-q)$，$c-d=c(1-q)=aq^2(1-q)$，当 $q\neq 1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 成等比数列，且公比为 q，但当 $q=1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 不是

等比数列.故选 C.

8.-2　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq1)$.

由已知条件可知$2a_2=a_4+a_3$,

又$a_3=a_2\cdot q$,$a_4=a_2\cdot q^2$,且$a_n\neq0$,代入到$2a_2=a_4+a_3$,

可得$2a_2=a_2\cdot q^2+a_2\cdot q$,

化简得$q^2+q-2=(q-1)(q+2)=0$,

解得$q=-2$或$q=1$(舍).

9.解:设所成的等比数列的公比为q,则$5=320q^6$,即$q^6=\frac{1}{64}$,解得$q=\pm\frac{1}{2}$.

当$q=\frac{1}{2}$时,插入的5个数为160,80,40,20,10;

当$q=-\frac{1}{2}$时,插入的5个数为-160,80,-40,20,-10.

能力提升

1.D　**解析**:等比数列$\{a_n\}$为递增数列的充要条件是$\begin{cases}a_1>0,\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1.\end{cases}$故"公比$q>1$"是"$\{a_n\}$为递增数列"的既不充分也不必要条件.故选 D.

2.BC　**解析**:对于A,1,2,3是等差数列,但是1,4,9不是等差数列,故A不正确;

对于B,a,b,c成等比数列,则$b^2=ac$,所以$\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}$,所以$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等比数列,故B正确;

对于C,a,b,c成等差数列,所以$2b=a+c$,所以$2^{2b}=2^{a+c}$,即$(2^b)^2=2^a\cdot2^c$,故C正确;

对于D,a^2,b^2,c^2成等比数列,所以$(b^2)^2=a^2c^2$,所以$b^2=ac$或$b^2=-ac$,若$b^2=-ac$,则a,b,c不成等比数列,故D不正确.

故选 BC.

3.3^n+1　**解析**:因为$a_{n+1}=3a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_1=4$,所以$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$,所以$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$,所以数列$\{a_n-1\}$是首项为3,公比为3的等比数列,所以$a_n-1=3\cdot3^{n-1}=3^n$,所以$a_n=3^n+1$.

4.$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**:设该等比数列为$\{a_n\}$,公比为q.依题意,得$a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$,所以$a_n=a_nq+a_nq^2$.

因为$a_n>0$,所以$q^2+q-1=0$,

解得$q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(q=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{舍去}\right)$.

5.解:易知四个数依次为a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+88,其中a_1,d为正偶数.

因为后3项成公比为q的等比数列,

所以$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+88)$,整理得$a_1=\frac{4d(22-d)}{3d-88}>0$,

所以$(d-22)(3d-88)<0$,解得$22<d<\frac{88}{3}$,

所以d可能的值为24,26,28.

当$d=24$时,$a_1=12$,$q=\frac{5}{3}$;

当$d=26$时,$a_1=\frac{208}{5}$(舍去);

当$d=28$时,$a_1=168$,$q=\frac{8}{7}$.

综上可得,q的所有可能的值构成的集合为$\left\{\frac{5}{3},\frac{8}{7}\right\}$.

自我超越

1.B　**解析**:易知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$,因为$2a_1,\frac{1}{2}a_3,a_2$成等差数列,所以$2a_1+a_2=2\times\frac{1}{2}a_3$,即$2a_1+a_1q=a_1q^2$.显然$a_1>0$,所以$2+q=q^2$,解得$q=2$或$q=-1$(舍去).故选 B.

2.BD　**解析**:因为第一行的数$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15}$成公差为$d$的等差数列,每列的数成公比为$q$的等比数列,

则$a_{24}=2=a_{14}q=(a_{11}+3d)q$,$a_{41}=-1=a_{11}q^3$,$a_{43}=5=a_{13}q^3=(a_{11}+2d)q^3$,

联立以上式子,可解得$2q^2=-1+9=8$,即$q=\pm2$.故B正确.

将$q=\pm2$代入前面式子,

当$q=2$时,$d=\frac{3}{8}$,$a_{11}=-\frac{1}{8}$,$a_{12}=\frac{1}{4}$,$a_{13}=\frac{5}{8}$,$a_{14}=1$,$a_{15}=\frac{11}{8}$,

此时$a_{44}=a_{14}q^3=1\times2^3=8$,

$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$,

则$a_{22}\cdot a_{44}=\frac{1}{2}\times8=4\neq\frac{8}{3}$;

当$q=-2$时,$d=-\frac{3}{8}$,$a_{11}=\frac{1}{8}$,$a_{12}=-\frac{1}{4}$,$a_{13}=-\frac{5}{8}$,$a_{14}=-1$,$a_{15}=-\frac{11}{8}$,此时$a_{44}=a_{14}q^3=8$,$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{2}$,则$a_{22}a_{44}=\frac{1}{2}\times8=4\neq\frac{8}{3}$.

综上所得,A,C错误B,D正确.

故选 BD.

课后素养评价(八)

基础落实

1.C　**解析**:由等比数列$\{a_n\}$,得$a_3a_7=a_5^2=16$.因为$a_1<0$,所以$a_5<0$,所以$a_5=-4$.故选 C.

2.D　**解析**:在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_2^3=27$,$a_2+a_6=15$,则$a_2=3$,$a_6=12$.因为$a_4$与$a_2$的符号一致,

所以$a_4=\sqrt{a_2a_6}=\sqrt{3\times12}=6$.故选 D.

3.D　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,显然$q\neq1$,

则$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=1+q^2=\frac{5}{4}$,解得$q^2=\frac{1}{4}$.又$a_1a_4a_7=a_4^3=(a_2q^2)^3=\left(-2\times\frac{1}{4}\right)^3=-\frac{1}{8}$.故选 D.

4.C　**解析**：依题意，得这 10 个正方形的边长构成以 2 为首项，$\sqrt{2}$ 为公比的等比数列$\{a_n\}$，所以 $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$，

所以第 10 个正方形的面积 $S=a_{10}^2=[2\times(\sqrt{2})^9]^2=4\times2^9=2\,048$.故选 C.

5.BCD　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

对于 A，当 $q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，故 A 错误；

对于 B，$a_na_{n+1}=a_1q^{n-1}\cdot a_1q^n=a_1^2q\cdot(q^2)^{n-1}$，所以 $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q^2$，$\{a_na_{n+1}\}$是等比数列，故 B 正确；

对于 C，$\lg|a_{n+1}a_{n+2}|-\lg|a_na_{n+1}|=\lg\left|\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}\right|=\lg|q^2|=2\lg|q|$，$\{\lg|a_n\cdot a_{n+1}|\}$是等差数列，故 C 正确；

对于 D，$\lg(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|)-\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)=\lg\frac{|a_{n+1}|+|a_{n+2}|}{|a_n|+|a_{n+1}|}=\lg\frac{|a_1q^n|+|a_1q^{n+1}|}{|a_1q^{n-1}|+|a_1q^n|}=\lg\frac{|a_1q^n|(1+|q|)}{|a_1q^{n-1}|(1+|q|)}=\lg|q|$，$\{\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)\}$是等差数列，故 D 正确.

故选 BCD.

6.$a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2\end{cases}$　**解析**：当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=a_2+2$，因为 $a_1=2$，所以 $a_2=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_n+2$，

则 $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$，

即 $3a_n=a_{n+1}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又 $\frac{a_2}{a_1}=1\neq3$，

所以$\{a_n\}$从第 2 项起构成首项为 $a_2=2$，公比为 3 的等比数列，

则 $a_n=2\times3^{n-2}$，$n\geqslant2$.

所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

7.-5　**解析**：因为 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}$，

所以 $\log_3a_{n+1}-\log_3a_n=1$，所以 $\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，所以$\{a_n\}$是公比 $q=3$ 的等比数列.

所以 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)=\log_{\frac{1}{3}}[(a_2+a_4+a_6)q^3]=\log_{\frac{1}{3}}(9\times27)=-5$.

8.解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $a_1a_2a_3=a_2^3=-\frac{1}{8}$，所以 $a_2=-\frac{1}{2}$.

因为 a_2，a_4，a_3 成等差数列，所以 $2a_4=a_2+a_3$.

所以 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q$，

解得 $q=-\frac{1}{2}$或 $q=1$(舍).

所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=1$.

9.(1)**证明**：由 $a_{n+1}=3a_n-4n+2$，

得 $a_{n+1}-2(n+1)=3a_n-6n=3(a_n-2n)$.

又因为 $a_1-2=1$，

所以$\{a_n-2n\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列.

(2)**解**：由(1)知 $a_n-2n=3^{n-1}$，

则 $a_n=3^{n-1}+2n$.

能力提升

1.C　**解析**：因为 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=q^{10}=a_{11}$，

所以 $m=11$.故选 C.

2.AC　**解析**：对于 A，当 $a_1>0$，$q>1$ 时，从第二项起，数列的每一项都大于前一项，所以数列$\{a_n\}$为递增数列，故 A 正确.

对于 B，当 $a_1>0$，$q<0$ 时，$\{a_n\}$为摆动数列，故 B 错误.

对于 C，当 $a_1<0$，$0<q<1$ 时，数列$\{a_n\}$为递增数列，故 C 正确.

对于 D，$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n-1}(q-1)>0$，当 $a_1>0$ 时，$q>1$，此时 $0<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$；当 $a_1<0$ 时，$0<q<1$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，故 D 错误.

故选 AC.

3.ACD　**解析**：对于 A，当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1+3$，解得 $a_1=-3$，故选项 A 正确；对于 C，当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+3$，所以 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，所以$\{a_n\}$是以 -3 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=-3\times2^{n-1}$，故选项 C 正确；对于 B，$a_2=-3\times2=-6$，故选项 B 错误；对于 D，$S_n=2a_n+3=-6\times2^{n-1}+3=-3\times2^n+3$，故选项 D 正确.故选 ACD.

4.C　**解析**：因为每一个单音的频率与前一个单音的频率的比 $q=\sqrt[12]{2}$，所以 $a_n=\sqrt[12]{2}a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，故 $a_n=a_1q^{n-1}$，$q=\sqrt[12]{2}$.又 $a_1=f$，所以 $a_6=a_1q^5=(\sqrt[12]{2})^5f=\sqrt[12]{2^5}f$.故选 C.

5.ACD　**解析**：当 $a_1<0$，$d=0$ 时，S_1 最大，此时 $d=0$，故 A 错误；

因为 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，当 $d<0$时，S_n 有最大值，故 B 正确；

由 $T_{2\,024}>T_{2\,023}$，可得 $b_{2\,024}>1$，但 $q>1$ 不一定成立，故 C 错误；

若 $T_{2\,024}<T_{2\,023}$，则 $b_{2\,024}<1$，但 $b_{2\,025}$ 可以大于或等于 1，此时 $T_{2\,025}\geqslant T_{2\,024}$，故 D 错误.

故选 ACD.

6.5　$\frac{5}{2}$　**解析**：因为$\{a_n\}$是等比数列，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，

所以 $a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$，即 $(a_3+a_5)^2=25$.

因为 $a_n>0$，

所以 $a_3+a_5=5$.

故 $a_3+a_5\geqslant2\sqrt{a_3a_5}=2a_4$，即 $a_4\leqslant\frac{5}{2}$，当且仅当 $a_3=a_5$ 时，等号成立.

7.(1)**证明**：因为 $a_n=q^{n-1}$，

所以 $a_{n+1}-a_n=q^n-q^{n-1}=q^{n-1}(q-1)$.

当 $0<q<1$ 时，有 $q^{n-1}>0$，$q-1<0$，

所以 $a_{n+1}-a_n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$.

所以$\{a_n\}$为递减数列.

(2)**解**：因为 a_k，a_{k+2}，a_{k+1}成等差数列，

所以 $2a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$.

所以 $2q^{k+1}-(q^{k-1}+q^k)=0$，

即 $q^{k-1}\cdot(2q^2-q-1)=0$.

因为 $q\neq0$，所以 $2q^2-q-1=0$，

解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$.

自我超越

1.C　解析：因为在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5^2$，由 $T_9=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_8a_9=512$，得 $a_5^9=512$，解得 $a_5=2$，所以 $a_3a_7=4$.因为等比数列$\{a_n\}$中奇数项同号，所以 $a_3>0$，$a_7>0$，于是 $a_3+a_7\geqslant2\sqrt{a_3a_7}=4$，当且仅当 $a_3=a_7=2$ 时取得最小值.故选 C.

2.A　解析：过圆 O：$x^2+y^2=16$ 内点 $P(3,\sqrt{6})$作该圆的弦，其中最大弦长为 8，最小弦长为 $2\sqrt{r^2-OP^2}=2\sqrt{4^2-[3^2+(\sqrt{6})^2]}=2$，所以当 $a_1=2$，$a_5=8$ 时，公比 q 取得最大值，此时 $q^4=\frac{a_5}{a_1}=4$，即 $q=\sqrt{2}$.因为过点 P 的 5 条弦的长度构成一个递增的等比数列，所以 $q>1$，所以该数列公比的取值范围是$(1,\sqrt{2}]$.故选 A.

课后素养评价(九)

基础落实

1.C　解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_4=a_1q^3=-q^3=64$，解得 $q=-4$，所以 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{-(1+1\,024)}{5}=-205$.故选 C.

2.D　解析：根据题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，若 $\frac{a_5}{a_2}=3$，即 $q^3=3$，则 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=4$.

故选 D.

3.A　解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$，

因为 a_2，a_4+2，a_5 成等差数列，

所以 $a_2+a_5=2(a_4+2)$，

所以 $a_1q+a_1q^4=2(a_1q^3+2)$，

即 $2q+2q^4=2(2q^3+2)$，

解得 $q=2$，

所以前 6 项和 $S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

故选 A.

4.B　解析：设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$①，则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$②.

①－②得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$，所以 $S_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.故选 B.

5.C　解析：设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.由等比数列前 n 项和的性质可得 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$ 也为等比数列.

又 $S_5=3$，$S_{15}=39$，故可得$(S_{10}-3)^2=3(39-S_{10})$，

解得 $S_{10}=12$ 或 $S_{10}=-9$.

因为等比数列的各项均为正数，所以 $S_{10}=12$.

故选 C.

6.4　解析：由题意可得 $S_k=\frac{-3[1-(-2)^k]}{1-(-2)}=(-2)^k-1=15$，解得 $k=4$.

7. $\frac{1}{3}(4^n-1)$　**解析**：当 $n=1$ 时，$a_1=2^1-1=1$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=2^{n-1}-1$，

两式作差可得 $a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

当 $n=1$ 时，$2^{1-1}=2^0=1=a_1$.

综上可得，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，故 $a_n^2=(2^{n-1})^2=4^{n-1}$，

则数列$\{a_n^2\}$是首项为 1，公比为 4 的等比数列，

其前 n 项和为 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

8.(1)证明：由题意知 $3a_{n+1}=2S_{n+1}+1$，则 $3(a_{n+1}-a_n)=2a_{n+1}$，

整理得 $a_{n+1}=3a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又 $a_1=1\neq0$，所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，则 $a_n=3^{n-1}$.

(2)解：由(1)可得 $b_n=n\cdot3^{n-1}$，则 $T_n=1\times3^0+2\times3^1+3\times3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1}$，

所以 $3T_n=1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$，

所以 $-2T_n=3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot3^n$，

所以 $T_n=\frac{1}{4}+\frac{(2n-1)\cdot3^n}{4}$.

能力提升

1.A　解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

当 $q\neq1$ 时，则 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$T_n=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{a_1q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$，

所以 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}=a_1a_n$.

当 $q=1$ 时，则 $a_n=a_1$，$S_n=na_1$，$T_n=\frac{n}{a_1}$，

所以 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{na_1}{\frac{n}{a_1}}=a_1^2=a_1a_n$ 成立.

综上所述，$\frac{S_n}{T_n}=a_1a_n$.

故选 A.

2.ABC　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $9S_3=S_6$，所以 $9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

所以 $9=1+q^3$，所以 $q=2$.

所以 $S_9=\frac{1-2^9}{1-2}=2^9-1$，故选项 A，B 正确.

又 $6S_3=6\times(2^3-1)\neq S_9$，故选项 D 不正确.

易知$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列，首项$\frac{1}{a_1}=1$，公比为$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$，

设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和为 S_n'，

所以 $S_5'=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$，故选项 C 正确.

故选 ABC.

3.D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=2$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=18$，

两式作商，得 $1+q^3=9$，解得 $q=2$.

所以$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=33$.故选 D.

4.B　**解析**：因为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_{10}:S_5=1:2$，所以$(S_{10}-S_5):S_5=-1:2$.由等比数列的性质得$(S_{15}-S_{10}):(S_{10}-S_5):S_5=1:(-2):4$，所以 $S_{15}:S_5=3:4$，所以$\frac{S_5+S_{10}+S_{15}}{S_{10}-S_5}=\frac{S_5+\frac{1}{2}S_5+\frac{3}{4}S_5}{\frac{1}{2}S_5-S_5}=-\frac{9}{2}$.故选 B.

5.B　**解析**：由等比数列的性质可得 $a_3a_{10}=a_6a_7=9$，

设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q=\frac{a_6a_7}{a_5a_7}=3$，

故$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=244$.

故选 B.

6.-6　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 S_3，S_9，S_6 成等差数列，

所以 $2S_9=S_3+S_6$.

显然公比 $q\neq1$，

所以 $2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$.

所以 $2q^9-q^6-q^3=0$.所以 $q^3=-\frac{1}{2}$.

所以 $a_5=\frac{a_8}{q^3}=3\times(-2)=-6$.

7.2　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由已知可得 $q\neq1$，则奇数项也构成等比数列，其公比为 q^2，首项为 a_1，

$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$，$S_{奇}=\frac{a_1[1-(q^2)^n]}{1-q^2}$.

由题意得$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=\frac{3a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}$，所以 $1+q=3$，所以 $q=2$.

8.解：(方法一)因为 $S_{99}=\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q}=56$，

所以 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=a_3(1+q^3+q^6+\cdots+q^{96})=a_1q^2\cdot\frac{1-(q^3)^{33}}{1-q^3}=a_1q^2\cdot\frac{1-q^{99}}{(1-q)(1+q+q^2)}=\frac{q^2}{1+q+q^2}\left[\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q}\right]=\frac{4}{1+2+4}\times56=32$.

(方法二)设 $b_1=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}$，

$b_2=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{98}$，

$b_3=a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$，

则 $b_1q=b_2$，$b_2q=b_3$ 且 $b_1+b_2+b_3=56$，

所以 $b_1(1+q+q^2)=56$，所以 $b_1=\frac{56}{1+2+4}=8$，$b_3=b_1q^2=32$，

即 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=32$.

9.解：(1)令 $a_n=2n-10\geqslant0$，解得 $n\geqslant5$，

所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|$

$=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5+a_6+\cdots+a_{15}$

$=S_{15}-2S_4=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}-2\times\frac{4(a_1+a_4)}{2}=130$.

(2)当 $n=1$ 时，$b_1=5$.

因为 $b_1+\frac{b_2}{5}+\frac{b_3}{5^2}+\cdots+\frac{b_n}{5^{n-1}}=5n$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$b_1+\frac{b_2}{5}+\frac{b_3}{5^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{5^{n-2}}=5(n-1)$，

两式相减，得$\frac{b_n}{5^{n-1}}=5$，即 $b_n=5^n$.

又当 $n=1$ 时，$b_1=5$ 符合该式，

所以 $b_n=5^n$.

所以$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-10}{5^n}$，

$T_n=(-8)\times\frac{1}{5}+(-6)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$，

故$\frac{1}{5}T_n=(-8)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+(-6)\times\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

两式相减得 $\frac{4}{5}T_n=(-8)\times\frac{1}{5}+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n-(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

即 $\frac{4}{5}T_n=-\frac{8}{5}+\frac{\frac{2}{25}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{5}}-(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

化简得 $T_n=\left(-\frac{1}{2}n+\frac{15}{8}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n-\frac{15}{8}$.

自我超越

1.C　解析：因为 $a_n=2^n$，所以 $na_n=n\cdot 2^n$，所以 $S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$①，$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$②.①－②，得 $-S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot 2^{n+1}$，整理得 $S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.由于 $S_n<10^4$，故 $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2<10\ 000$，而 $n\in\mathbf{N}^*$，得 n 的最大值为 9，则使得 $S_n<10^4$ 成立的正整数 n 的最大值为 9.故选 C.

2.D　解析：由题意可得 $S_n>0$，$S_6-S_3=3S_3+3$，由等比数列的性质可得 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等比数列，

则 $S_3(S_9-S_6)=(S_6-S_3)^2$，所以 $a_7+a_8+a_9=S_9-S_6=\dfrac{(S_6-S_3)^2}{S_3}=\dfrac{(3S_3+3)^2}{S_3}=9\left(S_3+\dfrac{1}{S_3}+2\right)\geqslant 9\times\left(2\sqrt{S_3\cdot\dfrac{1}{S_3}}+2\right)=36$，当且仅当 $S_3=1$ 时，等号成立.综上，$a_7+a_8+a_9$ 的最小值为 36.故选 D.

课后素养评价(十)

基础落实

1.D　解析：在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{1-a_n\times\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{2}{3}}=3-2a_n$.故选 D.

2.C　解析：由题意可知，热气球每分钟上升的高度构成等比数列，且首项 $a_1=25$，公比 $q=0.8$，则该热气球前 3 分钟上升的总高度为 $S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{25\times(1-0.8^3)}{1-0.8}=61$ m.故选 C.

3.C　解析：当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-2}$，又 $a_1=S_1=2$，即前 10 项分别为 2，1，2，4，8，16，32，64，128，256，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项中 $S_{偶}=\dfrac{1-4^5}{1-4}=\dfrac{1\ 023}{3}=341$，$S_{奇}=2+\dfrac{2\times(1-4^4)}{1-4}=2+\dfrac{510}{3}=172$，所以 $\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{172}{341}$.

故选 C.

4.B　解析：由题意可知，该三角形蜘蛛网中正三角形的周长从大到小是以 9 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，设最小的正三角形的边长为 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 米，则 $\dfrac{9\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}\leqslant 17$，则 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqslant\dfrac{1}{18}$，得 $n\leqslant 4$，故最小的正三角形的边长为 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{8}$ 米.故选 B.

5.C　解析：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由 $S_6=3S_3$，得 $a_4+a_5+a_6=S_6-S_3=2S_3$，

即 $a_1q^3+a_1q^4+a_1q^5=2(a_1+a_1q+a_1q^2)$，而 $a_1\neq 0$，$1+q+q^2\neq 0$，则 $q^3=2$.

因此 $S_9=S_6+a_7+a_8+a_9=3S_3+a_1q^6+a_1q^7+a_1q^8=3S_3+q^6S_3=7S_3$，所以 $\dfrac{S_9}{S_3}=7$.故选 C.

6.解：(1)由题意 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.

设公比为 $q(q>0)$，则 $2q^2=2q+4$，所以 $q=2$，

故 $a_n=2^n$.

由 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2$，得当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

$b_1=1$ 也适合上式，故 $b_n=2n-1$.

(2)由题意可得 $T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+[1+3+\cdots+(2n-1)]=2^{n+1}-2+n^2$.

(3)由(1)得 $c_n=\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

故 $H_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

能力提升

1.C　解析：在 a_n 和 a_{n+1} 之间插入 n 个 1，构成数列 $\{b_n\}$：a_1，1，a_2，1，1，a_3，1，1，1，a_4，…，

则从 a_1 到 a_n 共有 $n+[1+2+\cdots+(n-1)]=n+\dfrac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$(个)数.

当 $n=5$ 时，$\dfrac{5^2+5}{2}=15$，当 $n=6$ 时，$\dfrac{6^2+6}{2}=21$.

由于 $a_n=2^n$，所以 $S_{18}=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(18-5)\times 1=\dfrac{2\times(1-2^5)}{1-2}+13=75$.故选 C.

2.ABC　解析：设第 $(n+1)$ min 之内新感染的文件数为 a_{n+1}，前 n min 内新感染的文件数之和为 S_n，则 $a_{n+1}=2(S_n+1)$，且 $a_1=2$.

由 $a_{n+1}=2(S_n+1)$，得当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2(S_{n-1}+1)$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，

所以 $a_{n+1}=3a_n$.又 $a_2=2(S_1+1)=6$，$a_2=3a_1$，所以每分钟内新感染的文件数构成以 $a_1=2$ 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

在第 3 min 内，新感染了 $a_3=2\times 3^{3-1}=18$(个)文件.故选项 A 正确.

经过 5 min，该计算机共有 $1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+\dfrac{2\times(1-3^5)}{1-3}=3^5=243$(个)病毒文件.故选项 B 正确.

10 min 后，该计算机感染病毒的文件总数为 $1+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1+\dfrac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=3^{10}>\dfrac{1}{2}\times 10^5$，

所以该计算机处于瘫痪状态.故选项 C 正确.

该计算机瘫痪前，每分钟内新感染的文件数成公比为 3 的等比数列.故选项 D 不正确.

故选 ABC.

3.A　解析：当 $q<0$ 时，$a_{2\,023}a_{2\,024}=a_{2\,023}^2q<0$，不

成立；

当 $q\geqslant 1$ 时，$a_{2\,023}>1$，$a_{2\,024}>1$，$\dfrac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}>0$，不成立.

故 $0<q<1$，且 $a_{2\,023}>1$，$0<a_{2\,024}<1$，故 $S_{2\,024}>S_{2\,023}$，故 A 正确；

$a_{2\,023}a_{2\,024}-1>1-1=0$，故 B 错误；

因为 $a_{2\,023}>1$，$0<a_{2\,024}<1$，所以 $T_{2\,023}$ 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项，故 C，D 错误.

故选 A.

4.D　**解析**：在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，由 $a_{n+1}\cdot a_n=2^n$，得 $a_2=2$，$a_{n+2}\cdot a_{n+1}=2^{n+1}$，则有 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$，

因此数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $S_{2\,024}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2\,023})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2\,024})=\dfrac{1-2^{1\,012}}{1-2}+\dfrac{2\times(1-2^{1\,012})}{1-2}=3\times 2^{1\,012}-3$.

故选 D.

5.1　4　**解析**：由题意知 $2S_5=-1+S_{10}$，

所以 $S_{10}-2S_5=1$.

由 $\{a_n\}$ 为等比数列可知 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$ 成等比数列，所以 $(S_{10}-S_5)^2=S_5(S_{15}-S_{10})$，$S_{15}-S_{10}=\dfrac{(S_{10}-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{(2S_5+1-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{1}{S_5}+S_5+2\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{S_5}\cdot S_5}+2=4$，当且仅当 $S_5=1$ 时，等号成立.

6.解：(1)由题意，从今年起每年生活垃圾的总量(单位：万吨)构成数列 $\{a_n\}$，每年以焚烧方式处理的垃圾量(单位：万吨)构成数列 $\{b_n\}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $20(1+5\%)$ 为首项，$1+5\%$ 为公比的等比数列，

数列 $\{b_n\}$ 是以 $6+1.5=7.5$ 为首项，1.5 为公差的等差数列，

故 $a_n=20(1+5\%)^n$，$b_n=6+1.5n$.

(2)设今年起 n 年内通过填埋方式处理的垃圾总量为 S_n，

则 $S_n=(a_1-b_1)+\cdots+(a_n-b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(20\times 1.05+20\times 1.05^2+\cdots+20\times 1.05^n)-(7.5+9+\cdots+6+1.5n)$

$=\dfrac{(20\times 1.05)\times(1-1.05^n)}{1-1.05}-\dfrac{n}{2}(7.5+6+1.5n)=420\times 1.05^n-\dfrac{3}{4}n^2-\dfrac{27}{4}n-420$，

当 $n=5$ 时，$S_n\approx 63.4$.

所以今年起 5 年内通过填埋方式处理的垃圾总量约为 63.4 万吨.

自我超越

解：(1)若选择方案一：

设该家庭每月应还款 a 万元，则 $a+a(1+0.004)+a(1+0.004)^2+\cdots+a(1+0.004)^{17}=10\times(1+0.004)^{18}$，

即 $a\left(\dfrac{1-1.004^{18}}{1-1.004}\right)=10\times 1.004^{18}$，解得 $a=\dfrac{0.04\times 1.004^{18}}{1.004^{18}-1}\approx 0.577$(万元)；

若选择方案二：

设该家庭每季度应还款 b 万元，则有 $b+b(1+0.012)+b(1+0.012)^2+\cdots+b(1+0.012)^5=10\times(1+0.012)^6$，

即 $b\left(\dfrac{1-1.012^6}{1-1.012}\right)=10\times 1.012^6$，解得 $b=\dfrac{0.12\times 1.012^6}{1.012^6-1}\approx 1.737$ 万元.

(2)因为 $0.577\times 3=1.731<1.737$，

所以该家庭应选择第一种方案.

课后素养评价(十一)

基础落实

1.D　**解析**：当 $n=1$ 时，$n+3=4$，故左边应为 $1+2+3+4$.故选 D.

2.B　**解析**：当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式左边为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}$，

当 $n=k+1$ 时，不等式左边为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}$，

增加的部分为 $\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^k+2^k-1}$，共有 2^k 项.

故选 B.

3.B　**解析**：当 $n=1$ 时，$a^n=a$，所以左边应为 $1+a$.故选 B.

4.B　**解析**：因为 n 为正奇数，所以在证明时，应假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确，再推出 $n=2k+1$ 时正确.故选 B.

5.$(2k+1)^2$　**解析**：由题可知 $n=k$ 时，左边 $=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2$，

当 $n=k+1$ 时，左边 $=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$，

所以等式左边增加的项是 $(2k+1)^2$.

6.解：因为 $4S_n=a_n^2+2a_n$，所以当 $n=1$ 时，$4a_1=a_1^2+2a_1$，可得 $a_1(a_1-2)=0$，又 $a_n>0$，故 $a_1=2$；

当 $n=2$ 时，$4(a_1+a_2)=a_2^2+2a_2$，即 $a_2^2-2a_2-8=0$，即 $(a_2-4)(a_2+2)=0$，故 $a_2=4$；

当 $n=3$ 时，$4(a_1+a_2+a_3)=a_3^2+2a_3$，即 $a_3^2-2a_3-24=0$，即 $(a_3-6)(a_3+4)=0$，故 $a_3=6$；

当 $n=4$ 时，$4(a_1+a_2+a_3+a_4)=a_4^2+2a_4$，即 $a_4^2-2a_4-48=0$，

即 $(a_4-8)(a_4+6)=0$，故 $a_4=8$.

由 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=6$，$a_4=8$，可猜测 $a_n=2n$.

证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=2$，猜想成立；

设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，猜想成立，即 $a_k=2k$，

则当 $n=k+1$ 时，依题意，$4S_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}$①，$4S_k=a_k^2+2a_k$②，

由①－②，可得，$4a_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}-(a_k^2+2a_k)$，即 $a_{k+1}^2-2a_{k+1}-(4k^2+4k)=0$，

即 $(a_{k+1}+2k)[a_{k+1}-2(k+1)]=0$，

因为 $a_n>0$，故得 $a_{k+1}=2(k+1)$，即猜想也成立.

综上，$a_n=2n$ 对任何正整数 n 都成立，即该数列的通项公式为 $a_n=2n$.

能力提升

1.C　**解析**：当 $n=k$ 时，左边 $=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$；当 $n=k+1$ 时，左边 $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，对比可知，C 正确.故选 C.

2. $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$　**解析**：因为 $f(2^{k+1})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=f(2^k)+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$，

所以 $f(2^{k+1})-f(2^k)=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$.

3.$2(2k+1)$　**解析**：令 $f(n)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)$，则 $f(k)=(k+1)\cdot(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)$，

$f(k+1)=(k+2)\cdot(k+3)\cdot\cdots\cdot(k+k)\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)$，

所以 $\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$.

4.$(k^3+5k)+3k(k+1)+6$　**解析**：$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+1+3k^2+3k+5k+5=(k^3+5k)+3k^2+3k+6=(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

因为 $k(k+1)$ 为偶数，所以 $3k(k+1)$ 能被 6 整除，

所以 $(k+1)^3+5(k+1)$ 应变形为 $(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

5.证明：当 $n=1$ 时，左边 $=\sqrt{2}$，

右边 $=\frac{1\times(1+2)}{2}=\frac{3}{2}$，不等式成立；

假设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{k(k+2)}{2}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{k(k+2)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}$$

$$<\frac{k(k+2)}{2}+\frac{(k+1)+(k+2)}{2}=\frac{k^2+4k+3}{2}=\frac{(k+1)(k+3)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+2]}{2},$$

所以当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

综上，$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

6.解：将 $n=1$，$n=2$ 分别代入，

得 $\begin{cases}1=\frac{1}{6}\times1\times(a+1)(b+1),\\ 1\times2+2\times1=\frac{1}{6}\times2\times(a+2)(b+2),\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+b=3,\\ ab=2,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=1,\\ b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

猜测 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 对一切正整数都成立.

证明：①当 $n=1$ 时，显然成立.

②假设当 $n=k$ 时，$1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，

左边 $=1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$

$=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+2)(k+1)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$，

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②可知等式对一切正整数 n 都成立.

自我超越

解：取 $n=1,2,3$ 可得 $\begin{cases}a+b+c=1,\\ 8a+4b+2c=5,\\ 27a+9b+3c=14,\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{6}$.

下面用数学归纳法证明 $\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{2n^2+3n+1}{6n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

即证 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

①$n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，∴等式成立；

②假设 $n=k$ 时等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 成立，

则当 $n=k+1$ 时，等式左边 $=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k\cdot(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2]=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\cdot(2k+3)$，所以当 $n=k+1$ 时等式成立.

由数学归纳法，综合①②知，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时等式成立.

故存在 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{6}$ 使已知等式成立.

微专题培优集训（二）

1.C　**解析**：由题意知 $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}$

$\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{19}\right)=\frac{8}{57}$.故选 C.

2.B　**解析**：因为 $a_n=2^n+2n-1$，所以 $S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+2(1+2+\cdots+n)-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+2\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)-n=2^{n+1}+n^2-2$.故选 B.

3.A　**解析**：因为 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.故选 A.

4.$n\cdot2^n$　9　**解析**：由 $\frac{a_n}{2}=a_{n-1}+2^{n-1}$，得 $a_n=2a_{n-1}+2^n$，所以 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$，$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$.所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2^1}=\frac{2}{2}=1$，公差为 1 的等差数列，则 $\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)\times1=n$，所以 $a_n=n\cdot2^n$.所以 $b_n=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，从而 $S_{99}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9$.

5.468　**解析**：因为 $a_n=|25-2n|$，所以 $a_n=\begin{cases}25-2n,1\leqslant n\leqslant12,\\2n-25,n\geqslant13,\end{cases}$ 所以 $S_{30}=(a_1+a_2+\cdots+a_{12})+(a_{13}+\cdots+a_{30})$，所以 $S_{30}=(23+21+\cdots+1)+(1+3+5+\cdots+35)$，所以 $S_{30}=\frac{12\times(1+23)}{2}+\frac{18\times(1+35)}{2}=468$.

6.(1)**证明**：因为 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2^n+1$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-2^{n+1}=\frac{1}{a_n}+2^n-2^{n+1}+1=\frac{1}{a_n}-2^n+1$，

所以 $\left(\frac{1}{a_{n+1}}-2^{n+1}\right)-\left(\frac{1}{a_n}-2^n\right)=1$，且 $\frac{1}{a_1}-2^1=3-2=1$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-2^n\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

(2)**解**：由(1)可知 $\frac{1}{a_n}-2^n=1+(n-1)\times1=n$，

所以 $a_n=\frac{1}{2^n+n}$.

(3)**解**：由(2)得 $b_n=\frac{1}{a_n}=2^n+n$，

则 $S_{10}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=(2^1+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^{10}+10)$

$=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}+1+2+3+\cdots+10$

$=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+\frac{10\times(1+10)}{2}=2^{11}-2+55=2\ 101$.

7.解：(1)因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$3a_2+a_4=a_9$，

所以 $4a_1+6d=a_1+8d$，即 $3a_1=2d$.

又因为 $S_3=15$，所以 $a_1+d=5$，则有 $a_1=2$，$d=3$，

所以 $a_n=3n-1$.

(2)记数列 $\{(-1)^na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

所以 $T_n=-2+5-8+11+\cdots+(-1)^n(3n-1)$.

当 n 为奇数时，$T_n=-2+\underbrace{(-3)+(-3)+\cdots+(-3)}_{\frac{n-1}{2}\text{个}}$

$=-\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$；

当 n 为偶数时，$T_n=\underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{\frac{n}{2}\text{个}}=\frac{3}{2}n$.

综上，$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n-\frac{1}{2},n\text{ 为奇数},\\\frac{3}{2}n,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

8.(1)**证明**：由题意得 $a_n\neq0$，由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{1}{a_n}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$.又 $\frac{1}{a_1}=1$，

所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)可得 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，即 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，

所以 $b_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

(3)**解**：由 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，知 $c_n=\frac{1}{2^{n-1}a_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-2}}+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$，

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，

所以 $T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

课后素养评价(十二)

基础落实

1.A　**解析**:因为$\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}=\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{(1+\Delta t)-1}$=24.5 m/s,所以 24.5 m/s 是该物体从 1 s 到$(1+\Delta t)$s 这段时间的平均速度.故选 A.

2.A　**解析**:因为$h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$,所以$\Delta h=h(1)-h(0)=-4.9+6.5+10-10=1.6$,$\Delta t=1-0=1$,所以平均速度$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{1.6}{1}=1.6$(m/s).故选 A.

3.D　**解析**:因为$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{1-(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-1+t-t^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(\Delta t+2t-1)=2t-1$,所以当 $t=3$ 时,$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=2\times3-1=5$,即该物体在 $t=3$ s 时的瞬时速度是 5 m/s.故选 D.

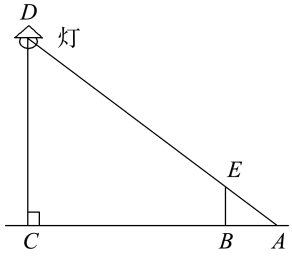
4.2　**解析**:根据题意,函数$f(x)=x^2-1$在区间$[1,m]$上的平均变化率为$\frac{f(m)-f(1)}{m-1}=\frac{(m^2-1)-(1^2-1)}{m-1}=m+1=3$,所以 $m=2$.

5.-2　9　**解析**:因为$f(x)=2x^2+1$,所以$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2(x+h)^2+1-2x^2-1}{h}=4x+2h$,

所以函数$f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率为$\lim\limits_{h\to0}(4x_0+2h)=4x_0=-8$,

得$x_0=-2$,所以$f(-2)=9$.

6.解:(1)如图所示,由题意得$AB=y$ m,$BC=x$ m.



由于$CD/\!/BE$,则$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$,

即$\frac{y}{y+x}=\frac{1.6}{8}$,所以$y=\frac{1}{4}x(x>0)$.

(2)设人离开点 C 的时间为 t s,

因为 84 m/min=1.4 m/s,所以$x=1.4t$.

所以$y=\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\times1.4t=\frac{7}{20}t$.

又$\Delta y=\frac{7}{20}(10+\Delta t)-\frac{7}{20}\times10=\frac{7}{20}\Delta t$,

所以$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{7}{20}$,

即人离开点 C 第 10 s 时影子长度的瞬时变化率为$\frac{7}{20}$.

能力提升

1.C　**解析**:$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{a-x}{(x-a)\cdot xa}=-\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{ax}=-\frac{1}{a^2}$.

2.B　**解析**:$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{a(2+\Delta t)^2-4a}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(4a+a\Delta t)=4a$,由题可知$4a=8$,解得$a=2$.

3.D　**解析**:根据题意,

①在$[0,t_1]$时间段内,图象是一条斜率大于零的线段,则汽车在该时间段内匀速行驶,故①正确;

②在$[t_1,t_2]$时间段内,图象是一条斜率越来越大的曲线,则汽车在该时间段内不断加速行驶,故②正确;

③在$[t_2,t_3]$时间段内,图象是一条斜率越来越小的曲线,则汽车在该时间段内不断减速行驶,故③正确;

④在$[t_3,t_4]$时间段内,位移不变,则汽车在该时间段内静止不动,故④正确.

故选 D.

4.3.31　**解析**:当$\Delta x=0.1$时,$1+\Delta x=1.1$;故$1+\Delta y=1.1^3=1.331$.故$k_{PQ}=\frac{1.331-1}{1.1-1}=3.31$.

5.②　**解析**:曲线在每一时刻的斜率代表在该时刻的运煤效率,运煤效率逐步提高说明斜率越来越大,即 Q 增加得越来越快,符合条件的只有②.

6.解:(1)$h(0)$表示航天飞机升空前的高度;

$h(1)$表示航天飞机升空后第 1 s 时的高度;

$h(2)$表示航天飞机升空后第 2 s 时的高度.

(2)航天飞机升空后第 2 s 内的平均速度

$$\overline{v}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=\frac{5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4-(5\times1^3+30\times1^2+45\times1+4)}{1}=170(\text{m/s}).$$

(3)第 2 s 末的瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{5(2+\Delta t)^3+30(2+\Delta t)^2+45(2+\Delta t)+4-(5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{5(\Delta t)^3+60(\Delta t)^2+225\Delta t}{\Delta t}=225(\text{m/s})$.

因此,第 2 s 末的瞬时速度为 225 m/s.

自我超越

C　**解析**:对于 A,由题图可知,甲地的气温日较差明显小于乙地气温日较差,所以甲地的绿化好于乙地,故 A 正确;

对于 B,由题图可知,甲、乙两地 6 时到 12 时气温的平均变化率为正数,且乙地的变化幅度更大,所以甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率,故 B 正确;

对于 C,由题图可知,甲、乙两地 12 时到 18 时气温的平均变化率为负数,且乙地的变化幅度更大,所以甲地气温的平均变化率大于乙地气温的平均变化率,故 C 错误;

对于 D,由题图可知,存在一个时刻,使得甲、乙两地气温的瞬时变化率相同,故 D 正确.

故选 C.

课后素养评价(十三)

基础落实

1.B　**解析**：$\Delta x=1.1-1=0.1$，$\Delta y=1.1^2-1^2=0.21$，所以函数的平均变化率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{0.21}{0.1}=2.1$.故选 B.

2. A　**解析**：$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\frac{1}{4}$.

3.B　**解析**：因为 $f(x)$的图象过原点，所以 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$.

4.D　**解析**：由$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2)-f(2+\Delta x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=-3$，得 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=3$.故选 D.

5.2　**解析**：因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a$，所以 $f'(1)=a=2$.

6. **解**：在 $x=1$ 附近的平均变化率 $k_1=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$；在 $x=2$ 附近的平均变化率 $k_2=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$；在 $x=3$ 附近的平均变化率 $k_3=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$.

若 $\Delta x=\frac{1}{3}$，则 $k_1=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$，$k_2=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$，$k_3=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$.

因为 $k_1<k_2<k_3$，所以在 $x=3$ 附近的平均变化率最大.

7. **解**：(1)$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\frac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

能力提升

1.A　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)$，

又 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-\frac{1}{1+\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x+3}{1+\Delta x}$

$=3$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\times 3=6$.故选 A.

2.C　**解析**：因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x+b(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a+b\Delta x)=a$，所以 $f'(x_0)=a$.

3.B　**解析**：$\frac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}$

$=\frac{-\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)^2+10-\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2+10\right]}{\Delta x}$

$=\frac{-(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x-3$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-3)=-3$.

4.0 或 2　**解析**：$y=f(x)=x^2$ 在 $x=x_0$ 处的导数值为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0$.

由 $2x_0=x_0^2$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=2$.

5.解：(1)因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=(\Delta x)^2+2\Delta x$，

所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

① 当 $\Delta x=2$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=4$；

② 当 $\Delta x=1$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=3$；

③ 当 $\Delta x=0.1$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.1$；

④ 当 $\Delta x=0.01$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.01$.

(2)由(1)可知$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$，当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$在区间$[1,1+\Delta x]$上的平均变化率逐渐变小，并趋近于 2.

6. **解**：因为 $\Delta y=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\frac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$，

所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}$.

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}\right)=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.

7.解：因为函数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ 的图象过点$(-1,0)$，所以$-1-a+b=0$①.

又 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3x^2-2ax$，

$f'(2)=4$，

所以 $f'(2)=3\times 2^2-2\times 2a=12-4a=4$②.

由①②解得 $a=2$，$b=3$.

自我超越

D　**解析**：对于①，在 t_1 时刻，两图象相交，说明甲、乙两人血液中的药物浓度相同，故①正确；对于②，在 t_2 时刻，两图象的切线斜率不相等，即甲、乙两人血液中药物浓度的瞬时变化率不相同，故②错误；对于③，由平均变化率公式知，甲、乙两人在 $[t_2,t_3]$ 这个时间段内，血液中药物浓度的平均变化率均为 $\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，故③正确；对于④，在 $[t_1,t_2]$ 和 $[t_2,t_3]$ 两个时间段内，甲血液中药物浓度的平均变化率分别为 $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ 和 $\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，显然不相同，故④错误.故选 D.

课后素养评价(十四)

基础落实

1.B

2.AD　**解析**：曲线的切线和曲线除有一个公共切点外，还可能有其他公共点，故 A 正确，B 不正确；$f'(x_0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率不存在，但切线可能存在，为 $x=x_0$，故 C 不正确，D 正确.

3.B　**解析**：由题图可知，函数图象在点 A 处的切线斜率小于点 B 处的切线斜率，所以根据导数的几何意义可知 $f'(x_A)<f'(x_B)$.故选 B.

4.A　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{3\Delta x}=2$，所以 $\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=2$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=6$，即 $f'(3)=6$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率是 6.故选 A.

5.B　**解析**：因为 $y=\frac{1}{2}x^2-2$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)=x$，所以曲线在点 $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ 处的切线的斜率为 1，所以曲线在点 P 处的切线的倾斜角为 45°.

6.1　**解析**：根据导数的定义可知，$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$.因为直线 l 经过 $(-1,0)$，$(0,1)$ 两点，且与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $A(2,3)$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数即为直线 l 的斜率，所以 $f'(2)=\frac{0-1}{(-1)-0}=1$.

7.**解**：(1)由导数的几何意义可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f'(x_0)$，

则由导数的定义，可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+3-(x_0^2-4x_0+3)}{\Delta x}$$

$$=2x_0-4.$$

即曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $2x_0-4$.

(2)$f(3)=0$，由(1)知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率为 $f'(3)=2$，

所以切线方程为 $y-0=2(x-3)$，即 $2x-y-6=0$.

能力提升

1.B　**解析**：由题意得 $f'(1)=2$，

所以 $\lim\limits_{d\to0}\frac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim\limits_{d\to0}\frac{a(1+d)^2+b-a-b}{d}=\lim\limits_{d\to0}(2a+ad)=2a=2$，

解得 $a=1$.

又 $f(1)=a+b=3$，则 $b=2$，所以 $\frac{b}{a}=2$.

故选 B.

2.C　**解析**：曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $f'(1)$，直线 $x+y-3=0$ 的斜率为 -1，由题意知 $f'(1)\cdot(-1)=-1$，故 $f'(1)=1$.故选 C.

3.$\frac{5}{3}$　**解析**：因为直线 $y=kx+1$ 与曲线 $f(x)=ax^3+b$ 相切于点 $P(1,2)$，

将 $P(1,2)$ 代入 $y=kx+1$，可得 $k+1=2$，解得 $k=1$.

因为 $f(x)=ax^3+b$，

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3ax^2$.

由 $f'(1)=3a=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$，可得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$.

因为点 $P(1,2)$ 在曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$ 上，

所以 $f(1)=\frac{1}{3}+b=2$，解得 $b=\frac{5}{3}$.

4.3　**解析**：设 $y=f(x)=2x^2-4x+p$，切点为 $(x_0,1)$.由 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(4x_0-4+2\Delta x)=4x_0-4$，根据导数的几何意义有 $4x_0-4=0$，所以 $x_0=1$，即切点为 $(1,1)$，所以 $1=2-4+p$，所以 $p=3$.

5.$2x-y+4=0$　**解析**：$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-(3\times1^2-4\times1+2)}{\Delta x}=2$.

故所求直线方程为 $y-2=2(x+1)$，

即 $2x-y+4=0$.

6.1　8　**解析**：因为直线 $5x+16y+b=0$ 的斜率 $k=-\frac{5}{16}$，所以 $f'(4)=-\frac{5}{16}$.

而 $f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\left(\frac{a}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}\right)-\left(\frac{a}{4}-\sqrt{4}\right)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\left(\frac{a}{4+\Delta x}-\frac{a}{4}\right)-(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{-a}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]=-\frac{a+4}{16},$$

所以 $-\frac{a+4}{16}=-\frac{5}{16}$，解得 $a=1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$，所以 $f(4)=\frac{1}{4}-\sqrt{4}=-\frac{7}{4}$，即切点为 $\left(4,-\frac{7}{4}\right)$.

因为$\left(4,-\frac{7}{4}\right)$在切线$5x+16y+b=0$上，

所以$5\times4+16\times\left(-\frac{7}{4}\right)+b=0$，得$b=8$.

综上，$a=1$，$b=8$.

7.解：设直线l与曲线C相切于点$P(x_0,y_0)$，令$y=f(x)=x^3-x^2+1$，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1-(x^3-x^2+1)}{\Delta x}$$

$$=3x^2-2x.$$

由题意知，直线l的斜率$k=1$，即$3x_0^2-2x_0=1$，

解得$x_0=-\frac{1}{3}$或$x_0=1$.

于是切点的坐标为$\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$或$(1,1)$.

当切点为$\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$时，$\frac{23}{27}=-\frac{1}{3}+a$，所以$a=\frac{32}{27}$.

当切点为$(1,1)$时，$1=1+a$，$a=0$(舍去).

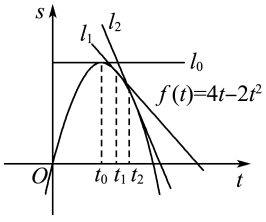
所以a的值为$\frac{32}{27}$，切点坐标为$\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$.

8.解：如图，分别用曲线$s=f(t)$在$t=t_0$，$t=t_1$，$t=t_2$处的切线，刻画曲线$s=f(t)$在上述三个时刻附近的变化情况.

①当$t=t_0$时，曲线$s=f(t)$在$t=t_0$处的切线l_0平行于t轴，所以在$t=t_0$附近曲线比较平坦，几乎没有升降；

②当$t=t_1$时，曲线$s=f(t)$在$t=t_1$处的切线l_1的斜率$f'(t_1)<0$，所以在$t=t_1$附近曲线下降.

③当$t=t_2$时，曲线$s=f(t)$在$t=t_2$处的切线l_2的斜率$f'(t_2)<0$，所以在$t=t_2$附近曲线下降.



由图象可以看出，直线l_1的倾斜程度小于直线l_2的倾斜程度，说明曲线$s=f(t)$在$t=t_1$附近比在$t=t_2$附近下降得慢.

当$t=2$时，$f(2)=0$.

当$t=2$时，切线的斜率

$$k=f'(2)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{4(2+\Delta t)-2(2+\Delta t)^2-8+8}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{4\Delta t-2(\Delta t)^2-8\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}(-2\Delta t-4)=-4.$$

所以切线方程为$s=-4(t-2)$，即$4t+s-8=0$.

自我超越

1.D　解析：由导数的定义知$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}=f'(5)$，由题图知$f'(5)=-1$.故选D.

2.D　解析：由导数的几何意义可知，$f'(0)$表示曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线斜率，

$f'(1)$表示曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线斜率，

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$表示$(0,f(0))$，$(1,f(1))$两点连线的斜率.

由题图可知，当x从0变化到1时，切线斜率越来越大，

所以$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

对比选项可知，D正确.

故选D.

课后素养评价(十五)

基础落实

1.D　解析：因为$f(x)=\log_2x$，所以$f'(x)=(\log_2x)'=\frac{1}{x\ln2}$，所以$f'(1)=\frac{1}{\ln2}$.

2.C　解析：由题意，$f'(x)=3x^2$.因为$f'(x_0)=3x_0^2=12$，所以$x_0=\pm2$.故选C.

3.D　解析：(方法一)设$x<0$，则$-x>0$.

所以$f(-x)=(-x)^2=x^2$.又$f(-x)=-f(x)$，

所以$f(x)=-x^2(x<0)$.

所以当$x<0$时，$f'(x)=-2x$，所以$f'(-1)=-2\times(-1)=2$.

故选D.

(方法二)因为当$x>0$时，$f(x)=x^2$，则$f'(x)=2x$，所以$f'(1)=2$.

又因为$f(x)$为**R**上的奇函数，所以$f'(x)$为**R**上的偶函数，所以$f'(-1)=f'(1)=2$.

故选D.

4.B　解析：因为$y'=e^x$，所以$y'|_{x=0}=e^0=1$，所以切线方程为$y-1=x$，即$y=x+1$，令$x=0$，则$y=1$.

5.C　解析：由$y=\sqrt{x}$，得$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.因为曲线$y=\sqrt{x}$在点$(1,1)$处的切线与直线$y=kx$平行，所以$k=y'|_{x=1}=\frac{1}{2}$.故选C.

6.-1　解析：由于$f'(x)=-\sin x$，由题得$\sin x_1=\sin x_2$，

又$0<x_1<x_2<\pi$，所以$x_2=\pi-x_1$，

所以$\cos(x_1+x_2)=\cos\pi=-1$.

7.eln 3　解析：设切点为(x_0,y_0).

因为函数$y=3^x$的导函数为$y'=3^x\ln3$，

所以$k=3^{x_0}\ln3$，

所以$y=kx$化为$y=(3^{x_0}\ln3)\cdot x$.

又因为(x_0,y_0)在曲线$y=3^x$上，

所以$(3^{x_0}\ln3)\cdot x_0=3^{x_0}$，

所以$x_0=\frac{1}{\ln3}=\log_3e$.

所以$k=e\ln3$.

8.解：(1)因为$y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$，所以$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=$

$\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

(2)因为 $y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$,所以 $y'=\cos x$.

能力提升

1.A　**解析**:$f'(x)=mx^{m-1}$,因为 $f'(-1)=-2$,所以 $m\times(-1)^{m-1}=-2$.若 $(-1)^{m-1}=-1$,则 $-m=-2$,解得 $m=2$,符合题意;若 $(-1)^{m-1}=1$,则 $m=-2$,不满足 $(-1)^{m-1}=1$,故舍去.综上所述,$m=2$.故选 A.

2.BC　**解析**:对于 $f(x)=\begin{cases}x^3,x<0,\\ \ln x,0<x<1,\end{cases}$ 易知 $f'(x)=\begin{cases}3x^2,x<0,\\ \frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$ 当 $a<0$ 时,由 $f'(a)=3a^2=12$,解得 $a=-2$;当 $0<a<1$ 时,由 $f'(a)=\frac{1}{a}=12$,解得 $a=\frac{1}{12}$.故选 BC.

3.A　**解析**:因为 $y'=\cos x$,而 $\cos x\in[-1,1]$.

所以直线 l 的斜率的取值范围是 $[-1,1]$,

所以直线 l 的倾斜角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

4.A　**解析**:因为 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,

所以曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线方程为

$y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$.

令 $x=0$,得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$;令 $y=0$,得 $x=3a$.

所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}\cdot 3a=18$,解得 $a=64$.

5.$y=x-1$　$\frac{4\,001}{4\,000}$　**解析**:由题得 $f'(x)=\frac{1}{x}$,$f'(1)=1$,所以切线方程为 $y=x-1$.设 $\sqrt[4\,000]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{4\,000}}=x$,则 $\ln x=\frac{1}{4\,000}$.由切线方程得,得 $\frac{1}{4\,000}=x-1$,$x=1+\frac{1}{4\,000}=\frac{4\,001}{4\,000}$,所以 $\sqrt[4\,000]{\mathrm{e}}\approx\frac{4\,001}{4\,000}$.

6.$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　**解析**:与直线 $y=x-1$ 平行的曲线 $f(x)=x^2$ 的切线的切点到直线 $y=x-1$ 的距离最短.设切点为 (x_0,y_0),则 $f'(x_0)=2x_0=1$,

所以 $x_0=\frac{1}{2}$,$y_0=\frac{1}{4}$.即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离最短.

所以最短距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

7.$x-\mathrm{e}y=0$　**解析**:当 $x\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$,可得 $f'(x)=\mathrm{e}^x$.

设切点为 $P(x_0,y_0)$,则 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}$,

所以切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点 $O(0,0)$,可得 $-\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$,解得 $x_0=1$,不符合题意,舍去;

当 $x>0$ 时,函数 $f(x)=\ln x$,可得 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

设切点为 $Q(x_1,y_1)$,则 $f'(x_1)=\frac{1}{x_1}$,

所以切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.

因为切点过原点 $O(0,0)$,可得 $\ln x_1=1$,解得 $x_1=\mathrm{e}$,

此时切线方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$,即 $x-\mathrm{e}y=0$.

8.①②③④　**解析**:①中,$f'(x)=\mathrm{e}^x$,因为 $f(x)=f'(x)$,所以 $f(x)$ 有无数个“巧值点”;②中,$f'(x)=\frac{1}{x}$,令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}(x>0)$,易知 $g(x)$ 的图象为 $(0,+\infty)$ 上一条连续不间断的曲线,且 $g(1)=-1<0$,$g(\mathrm{e})=1-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$,由函数零点存在定理,可知 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上必有零点,所以 $f(x)$ 有“巧值点”;③中,$f'(x)=\cos x$,由 $\sin x=\cos x$,得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 有“巧值点”;④中,$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,因为 $\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 有实数解,所以 $f(x)$ 有“巧值点”.

9.解:(1)$f(x)$ 在区间 $[2\,024,2\,025]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(2\,025)-f(2\,024)}{2\,025-2\,024}=\frac{2\,025^2-2\,024^2}{2\,025-2\,024}=4\,049$.

(2)因为 $f(x)=x^2$,所以 $f'(x)=2x$,所以 $f(2)=4$,$f'(2)=4$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $4x-y-4=0$.

(3)设切点为 $P(t,t^2)$,

则切线方程为 $y-t^2=2t(x-t)$,又切线过点 $(2,0)$,

所以 $-t^2=2t(2-t)$,解得 $t=0$ 或 $t=4$.

所以所求切线方程为 $y=0$ 或 $y-16=8(x-4)$,即 $y=0$ 或 $8x-y-16=0$.

自我超越

1.C　**解析**:由题意得 $f'(x)=3x^2$,$g(x)=6x$,则 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$,$g\left(\frac{2}{3}\right)=4$,则曲线 $y=f(x)=x^3$ 在点 $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right)$ 处的曲率 $K=4\times\left[1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{108}{125}$.故选 C.

2.e−1　**解析**:因为 $f(x)=\ln x$,$f'(x)=\frac{1}{x}$,根据拉格朗日中值定理得 $f(\mathrm{e})-f(1)=f'(c)(\mathrm{e}-1)$,即 $1=\frac{1}{c}(\mathrm{e}-1)$,可得 $c=\mathrm{e}-1$.

课后素养评价(十六)

基础落实

1.A　**解析**:根据求导公式,得函数 $f(x)=3^x+\ln 2$ 的导数为 $f'(x)=3^x\ln 3$.故选 A.

2.C　**解析**:因为 $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$,所以 $f'(x)=$

$\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$，则 $f'(e)=e$.故选 C.

3.C　**解析**：由题可得 $f'(x)=(x+1)(x+2)+x[(x+1)(x+2)]'$，则 $f'(0)=1\times2=2$.故选 C.

4.C　**解析**：因为 $f(x)=3f'(1)x-x^2+\ln x+\frac{1}{2}$，所以 $f'(x)=3f'(1)-2x+\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=3f'(1)-2\times1+\frac{1}{1}$，解得 $f'(1)=\frac{1}{2}$.故选 C.

5.BCD　**解析**：因为 $\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)'=0$，所以 A 错误；因为 $(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，所以 B 正确；因为 $\left(\frac{x+1}{e^x}\right)'=\frac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x}{e^x}$，所以 C 正确；因为 $\left(\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=x^2-1$，所以 D 正确.故选 BCD.

6.BC　**解析**：对于 A，$f(x)=3\cos x$，其导函数 $f'(x)=-3\sin x$ 为奇函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意；对于 B，$f(x)=x^3+x$，其导函数 $f'(x)=3x^2+1$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 C，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，其导函数 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 D，$f(x)=e^x+x$，其导函数 $f'(x)=e^x+1$ 为非奇非偶函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意.故选 BC.

7.2　**解析**：由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$，又切点为 $(1,e)$，故 $k=e$，切线 l 为 $y=ex$.

设 l 与曲线 $y=a+\ln x$ 的切点为 (x_0,ex_0)，$y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_0}=e$，解得切点为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$，

所以 $a+\ln\frac{1}{e}=a-1=1$，解得 $a=2$.

8.3　**解析**：$f'(x)=a\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=a(1+\ln x)$.

由于 $f'(1)=a(1+\ln 1)=a$，又 $f'(1)=3$，所以 $a=3$.

9.$\pm a$　**解析**：$y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+a^2)\cdot1}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$.由 $x_0^2-a^2=0$ 得 $x_0=\pm a$.

10.解：(1)$y'=(x^3-2x+3)'=(x^3)'-(2x)'+3'=3x^2-2$.

(2) $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(3)$f'(x)=(x^3\ln x)'=(x^3)'\cdot\ln x+x^3\cdot(\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$.

(4)$S'(t)=(3\sin t-6t+100)'=(3\sin t)'-(6t)'+100'=3\cos t-6$.

(5) $g'(x)=(x^4\cos x)'=(x^4)'\cdot\cos x+x^4\cdot(\cos x)'=4x^3\cos x-x^4\sin x$.

能力提升

1.C　**解析**：由题意得 $x>0$，因为 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，所以 $f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-2x-4}{x}$，若 $f'(x)>0$，即 $\frac{2x^2-2x-4}{x}>0$，即 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$(舍去)，故不等式 $f'(x)>0$ 的解集为 $(2,+\infty)$.故选 C.

2. B　**解析**：由已知可得 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)[f(x)+5]}{[g(x)]^2}$，

所以 $h'(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)[f(2)+5]}{[g(2)]^2}=\frac{6-10}{4}=-1$.故选 B.

3.BD　**解析**：令 $f(x)=ae^x+x\ln x$，

则 $f'(x)=ae^x+\ln x+1$，$f'(1)=ae+1=2$，得 $a=\frac{1}{e}=e^{-1}$，$f(1)=ae=2+b$，可得 $b=-1$.

4.A　**解析**：由题易得曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的方程为 $y=-x$，所围成的三角形的顶点为 $O(0,0)$，$A(\pi,0)$，$C(\pi,-\pi)$，所以三角形面积为 $\frac{\pi^2}{2}$.

5.0　**解析**：由题意可得，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2f'(1)$，令 $x=1$，则 $f'(1)=\frac{1-1}{e}+2f'(1)$，解得 $f'(1)=0$.

6.$\frac{1}{4}$或-4　**解析**：由题意得 $f'(x)=\begin{cases}x^2-4,x<0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$

因为 $f'(a)=12$，

所以 $\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ a^2-4=12,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=-4$.

7.$(1,-2)$　**解析**：因为 $f'(x)=3x^2-6x+2$，所以 $f''(x)=6x-6$.

令 $f''(x)=6x-6=0$，得 $x=1$，$f(1)=1-3+2-2=-2$.所以“疑似拐点”A 的坐标为 $(1,-2)$.

8.解：由 $f(2x+1)=4g(x)$，得

$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d$，

所以 $a+2=2c$①，

$a+b+1=4d$②.

由 $f'(x)=g'(x)$，得 $2x+a=2x+c$，

所以 $a=c$③.

由①与③，得 $a=c=2$.

此时 $f(x)=x^2+2x+b$，

由 $f(5)=30$，得 $25+10+b=30$，

所以 $b=-5$.再由②，得 $d=-\frac{1}{2}$.

从而 $g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}$，

故 $g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$.

自我超越

1.C　**解析**：由 $f'(x)=g'(x)$，得 $f'(x)-g'(x)=0$，

即$[f(x)-g(x)]'=0$，所以$f(x)-g(x)=C$(C为常数).故选C.

2.$2x+y+1=0$　**解析**：由$f(x)$为偶函数，可得$f(-x)=f(x)$.当$x<0$时，$f(x)=\ln(-x)+3x$；当$x>0$时，$-x<0$，所以$f(x)=f(-x)=\ln x-3x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-3$，可得$f(1)=\ln 1-3=-3$，$f'(1)=1-3=-2$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,-3)$处的切线的方程为$y-(-3)=-2(x-1)$，即$2x+y+1=0$.

课后素养评价(十七)

基础落实

1.D　**解析**：设$u=-2x+3$，$y=e^u$，则$u'_x=-2$，$y'_u=e^u$，所以$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-2e^u=-2e^{-2x+3}$，即$f'(x)=-2e^{-2x+3}$，所以$f'(2)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.故选D.

2.C　**解析**：因为$y=\frac{1}{(3x-1)^2}=(3x-1)^{-2}$，

所以$y'=-2(3x-1)^{-3}\cdot(3x-1)'=\frac{-6}{(3x-1)^3}$.故选C.

3.A　**解析**：$y'=2\cos 2x+2\sin 2x=2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4.A　**解析**：$y'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)'+\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

5.C　**解析**：由题可得$f'(x)=\frac{1}{x}+4$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)=-10$.故选C.

6.D　**解析**：因为$f(x)=x+e^{2x}$，所以$f'(x)=1+2e^{2x}$，所以$f'(0)=1+2=3$.

又$f(0)=1$，所以曲线$f(x)=x+e^{2x}$在点$(0,f(0))$处的切线的方程为$y=3x+1$.

故选D.

7.A　**解析**：设$u=2t$，$y=\cos u$，则$y'=-\sin u\cdot u'=-\sin 2t\cdot 2=-2\sin 2t$，即$s'(t)=-2\sin 2t$.当$t=\frac{\pi}{6}$时，$2t=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，则$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$s'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.故选A.

8.$\frac{1}{3}$　**解析**：因为$f(x)=\sqrt{2x+1}$，所以$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$，则曲线$y=f(x)$在$x=4$处切线的斜率为$f'(4)=\frac{1}{3}$.

9.解：(1)$y'=2(x^2-4)(x^2-4)'=2(x^2-4)\cdot 2x=4x^3-16x$.

(2)$y'=(10^{3x-2}\ln 10)\cdot(3x-2)'=3\times 10^{3x-2}\times\ln 10=3\ln 10\times 10^{3x-2}$.

(3)$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(4)$y'=\frac{[\cos(2x+1)]'\cdot x-\cos(2x+1)\cdot x'}{x^2}$

$=\frac{-2x\sin(2x+1)-\cos(2x+1)}{x^2}$

$=-\frac{2x\sin(2x+1)+\cos(2x+1)}{x^2}$.

(5)$y'=\left(\frac{x^2}{\cos 2x}\right)'$

$=\frac{(x^2)'\cos 2x-x^2(\cos 2x)'}{(\cos 2x)^2}$

$=\frac{2x\cos 2x-x^2(-2\sin 2x)}{(\cos 2x)^2}$

$=\frac{2x\cos 2x+2x^2\sin 2x}{(\cos 2x)^2}$.

能力提升

1.D　**解析**：$f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，且为奇函数.

2.C　**解析**：由$N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，得$N'(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}\times\ln 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)$.

因为当$t=24$时，$N'(24)=N_0 2^{-\frac{24}{24}}\times\ln 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)=-8\ln 2$，解得$N_0=384$，

所以$N(t)=384\times 2^{-\frac{t}{24}}$，所以当$t=96$时，$N(96)=384\times 2^{-\frac{96}{24}}=384\times 2^{-4}=24$.

3.BD　**解析**：对A，$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin 2x$，故A错误；

对B，$f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f'(x_0)=\ln x_0+1=2\Rightarrow x_0=e$，故B正确；

对C，$f(x)=3x^2e^{2x}\Rightarrow f'(x)=6xe^{2x}+6x^2e^{2x}\Rightarrow f'(1)=12e^2$，故C错误；

对D，$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x\Rightarrow f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(2)=-\frac{9}{4}$，故D正确.

4.C　**解析**：设切点为(m,n)，由题得$y'=\frac{1}{x+b-1}$，

所以切线的斜率$k=\frac{1}{m+b-1}$，且$n=1+\ln(m+b-1)$，

所以切线方程为$y=\frac{1}{m+b-1}(x-m)+1+\ln(m+b-1)$，

即$y=\frac{1}{m+b-1}\cdot x+\frac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)$，与$y=x-a$相同，

所以$\begin{cases}\frac{1}{m+b-1}=1,\\ \frac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)=-a,\end{cases}$整理得$a+b=1$，

所以$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 5+$

$2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 9.

故选 C.

5.BD　**解析**：令 $f(x)=2x^2+3x+4$，则 $f'(x)=4x+3$.

令 $f'(x)=4x+3=-1$，有 $x=-1$，则 $f(-1)=2-3+4=3$，

所以切线方程为 $y-3=-(x+1)$，即 $y=-x+2$，故 $m=2$.

令 $g(x)=-e^{x+n}$，则 $g'(x)=-e^{x+n}$，

令 $g'(x)=-e^{x+n}=-1$，有 $x=-n$，则 $g(-n)=-e^0=-1$，

所以切线方程为 $y+1=-(x+n)$，即 $y=-x-n-1$，

故有 $-n-1=2$，即 $n=-3$.

故选 BD.

6.$\frac{4}{3}$　**解析**：设 $u=2x-2$，则 $f'(x)=(u^3)'\cdot u'=6(2x-2)^2$，所以 $f'(2)=6\times(4-2)^2=24$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,8)$ 处的切线的方程为 $y-8=24(x-2)$，即 $24x-y-40=0$.

所以切线与 x 轴的交点是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点是 $(2,8)$，

所以所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\left|2-\frac{5}{3}\right|\times8=\frac{4}{3}$.

7.2　e　**解析**：因为 $y=xe^{a-x}+bx$，

所以 $y'=(1-x)e^{a-x}+b$.

又曲线在 $x=2$ 处的切线的方程为 $y=(e-1)x+4$，

所以 $y'|_{x=2}=(1-2)e^{a-2}+b=e-1$，且 $2(e-1)+4=2e^{a-2}+2b$，

解得 $b=e$，$a=2$.

8.解：令 $y=\ln u$，$u=2x+3$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(2x+3)'=\frac{1}{u}\cdot2=\frac{2}{2x+3}$.

$y'|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3-1}=1$，即函数图象在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln2\right)$ 处的切线的倾斜角的正切值为 1，所以倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

自我超越

1.B　**解析**：设曲线 $y=\ln(2x-1)$ 上的一点 $P(m,n)$，且过点 P 的切线与直线 $2x-y+8=0$ 平行. 因为 $y'=\frac{2}{2x-1}$，所以切线的斜率为 $\frac{2}{2m-1}=2$，解得 $m=1$，$n=\ln(2-1)=0$. 所以点 $P(1,0)$ 到直线 $2x-y+8=0$ 的距离最短是 $d=\frac{|2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$. 故选 B.

2.0　**解析**：由题知 $F'(x)=3x^2f'(x^3-1)-3x^2f'(1-x^3)$，则 $F'(1)=3f'(0)-3f'(0)=0$.

微专题培优集训(三)

1.A　**解析**：因为 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\ln x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$. 令 $\sqrt{x}=a\ln x$，$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x}$，解得 $a=\frac{e}{2}$. 故选 A.

2.D　**解析**：由 $y=x+\ln x$，得 $y'=\frac{1}{x}+1$，所以 $y'|_{x=1}=2$，所以曲线 $y=x+\ln x$ 在 $(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$. 又切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 有且仅有一个公共点，所以 $ax^2+(a+2)x+1=2x-1$ 只有一个解，整理得 $ax^2+ax+2=0$，当 $a=0$ 时，显然不成立，当 $a\neq0$ 时，只需 $\Delta=a^2-8a=0$，所以 $a=8$. 故选 D.

3.B　**解析**：设公切线与曲线 $y=\ln x$ 相切的切点为 (m,n). $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$，由切线的斜率为 1，可得 $\frac{1}{m}=1$，即 $m=1$，则切点为 $(1,0)$，切线的方程为 $y=x-1$，与 $y=(x+a)^2$ 联立，可得 $x^2+(2a-1)x+a^2+1=0$，由 $\Delta=(2a-1)^2-4(a^2+1)=0$，解得 $a=-\frac{3}{4}$. 故选 B.

4.B　**解析**：因为 $f(x)=x\ln x$，所以 $f'(x)=1+\ln x$，所以 $f'(1)=1+\ln1=1$，所以直线 l 的斜率 $k=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $A(1,0)$ 处的切线的方程为 $y=x-1$. 由 $\begin{cases}y=x-1,\\y=ax^2-x,\end{cases}$ 得 $ax^2-2x+1=0$，由 $\Delta=4-4a=0$，解得 $a=1$. 故选 B.

5.A　**解析**：由 $y=\ln x-1$，得 $y'=\frac{1}{x}$，由 $y=\ln(x-1)$，得 $y'=\frac{1}{x-1}$. 设直线 l 与曲线 $y=\ln x-1$ 相切于点 $(x_1,\ln x_1-1)$，与曲线 $y=\ln(x-1)$ 相切于点 $(x_2,\ln(x_2-1))$，则 $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2-1}$，故 $x_1=x_2-1$，又 $\frac{\ln(x_2-1)-(\ln x_1-1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_1}$，

解得 $x_1=1$，$x_2=2$，所以直线 l 过点 $(1,-1)$，且斜率为 1，即直线 l 的方程为 $y=x-2$. 故选 A.

6.B　**解析**：设函数 $f(x)=x^2-ax$ 与函数 $g(x)=\ln x+2x$ 图象的公共点坐标为 (x_0,y_0)，又 $f'(x)=2x-a$，$g'(x)=\frac{1}{x}+2$，依题意得 $\begin{cases}2x_0-a=\frac{1}{x_0}+2,\\x_0^2-ax_0=\ln x_0+2x_0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2x_0-\frac{1}{x_0}-2,\\x_0^2+\ln x_0-1=0.\end{cases}$ 令 $h(x)=x^2+\ln x-1$，显然函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，则当 $h(x)=0$ 时，$x=1$，因此解方程 $x_0^2+\ln x_0-1=0$，得 $x_0=1$，此时 $a=-1$. 经检验 $a=-1$ 符合题意，所以 $a=-1$. 故选 B.

7.ABC　**解析**：由题知 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x+b}$，设斜率为 1 的切线与曲线 C_1，C_2 上的切点横坐标分别为 x_1，x_2，由题知 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2+b}=1$，解得 $x_1=0$，$x_2=1-b$，则切点分别为 $(0,a+1)$ 和 $(1-b,a^2)$，则两点处的切线的方程分别为 $y=x+(a+1)$ 和 $y=x+a^2-1+b$. 依题意，可得

$a+1=a^2-1+b$，则 $b=2+a-a^2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$.故 b 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.故选 ABC.

8.解：(1)联立$\begin{cases}y=x^2,\\y=\frac{1}{x},\end{cases}$解得 $x=1$，所以交点坐标为(1,1).

对 $y=x^2$ 求导，可得 $y'=2x$，当 $x=1$ 时，得切线斜率 $k_1=2\times1=2$，

所以切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$；

对 $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 求导，可得 $y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$，当 $x=1$ 时，得切线斜率 $k_2=-1$，

所以切线方程为 $y-1=-1(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

所以两函数图象在交点 P 处的切线方程分别为 $2x-y-1=0$，$x+y-2=0$.

(2)设公共点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，$x_0>0$.

对 $y=\ln x$ 求导，可得 $y'=\frac{1}{x}$，则图象在点 P 处的切线的斜率 $k_1=\frac{1}{x_0}$.

对 $y=ax^2$ 求导，可得 $y'=2ax$，则图象在点 P 处的切线的斜率 $k_2=2ax_0$.

因为两函数图象在公共点 P 处存在公切线，所以 $k_1=k_2$，即 $\frac{1}{x_0}=2ax_0$①.

又因为点 P 在两函数图象上，所以 $\ln x_0=ax_0^2$②.

由①得 $a=\frac{1}{2x_0^2}$，将其代入②可得 $\ln x_0=\frac{1}{2x_0^2}\times x_0^2=\frac{1}{2}$，即 $\ln x_0=\frac{1}{2}$，解得 $x_0=\sqrt{e}$.

将 $x_0=\sqrt{e}$ 代入①，得 $\frac{1}{\sqrt{e}}=2a\sqrt{e}$，解得 $a=\frac{1}{2e}$.

将 $x_0=\sqrt{e}$ 代入 $y=\ln x$，得 $y_0=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$.

所以 $a=\frac{1}{2e}$，点 P 的坐标为$\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$.

课后素养评价(十八)

基础落实

1.B **解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$.故选 B.

2.C **解析**：对于函数 $y=\frac{1}{x-2}$，其导数 $y'=\frac{-1}{(x-2)^2}<0$，且函数在区间 $(-1,1)$ 上有意义，所以函数 $y=\frac{1}{x-2}$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，其余选项都不符合要求.

3.D **解析**：函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$，因为 $a<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 内单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，只有 D 符合.故选 D.

4.A **解析**：$y=f(x)$ 的单调性变化情况为增、减、增、减，$y=f'(x)$ 的符号变化情况依次为大于零、小于零、大于零、小于零，故 A 正确.

5.A **解析**：根据 $y=xf'(x)$ 的图象可知，当 $x\in(-3,-1)\cup(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-4,-3)\cup(-1,0)\cup(1,2)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-3,-1)$，$(0,1)$ 内单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-4,-3)$，$(-1,0)$，$(1,2)$ 内单调递增.故选 A.

6.$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ **解析**：因为 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$.

令 $f'(x)>0$，得 $\cos x>-\frac{1}{2}$.又因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $0<x<\frac{2\pi}{3}$.

所以函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$，$x\in(0,\pi)$ 的单调递增区间为$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$.

7.解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

令 $f'(x)>0$，即 $1-\frac{1}{x}>0$，解得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，即 $1-\frac{1}{x}<0$，解得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x$.

令 $f'(x)>0$，即 $(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x>0$，

所以 $(2x+1)+(x^2+x+1)>0$，即 $x^2+3x+2>0$，解得 $x>-1$ 或 $x<-2$，

所以函数 $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(-1,+\infty)$.

能力提升

1.A **解析**：由 $f'(x)$ 的符号易判断，选 A.

2.B **解析**：由题意知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，则方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的根的判别式 $\Delta=4a^2-12b=4(a^2-3b)<0$，故 $f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

3.D **解析**：对 $f(x)=x-2\sin x+1$ 求导，得 $f'(x)=1-2\cos x$.

令 $f'(x)>0$，得 $\cos x<\frac{1}{2}$.

因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

4.A **解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\ln(e^{-x}+1)+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-x+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-\frac{x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)}>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.故选 A.

5. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(2,+\infty)$　**解析**：易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2$.

当 $x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(2,+\infty)$.

6.解：函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f'(x)=2(e^x-1+xe^x-x)=2(e^x-1)(x+1)$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减.

自我超越

1.CD　**解析**：因为 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，所以 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，即 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增.

对于 A，由于 $f(x)=\sin x$ 在 **R** 上不具有单调性，故排除 A；对于 B，易知 $f(x)=e^x$ 为非奇非偶函数，故排除 B；对于 C，$f(x)=x^3+3x$，$f'(x)=3x^2+3>0$，所以 $f(x)$ 为奇函数且在 **R** 上单调递增，满足题意；对于 D，易知 $f(x)=x|x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，满足题意.

2.BD　**解析**：由题意得 $\ln y=x\ln x$，两边同时求导得 $\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1$，即 $y'=x^x(\ln x+1)(x>0)$.令 $y'>0$，即 $\ln x+1>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，即函数的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.故选 BD.

课后素养评价(十九)

基础落实

1.A　**解析**：由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增.

所以当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)>f(a)\geqslant 0$.

2.A　**解析**：$f'(x)=x^2-2ax$，令 $f'(x)<0$，由于 $a>0$，故解得 $0<x<2a$，故 $2a=2$，即 $a=1$.

3.A　**解析**：若 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

则 $a\leqslant 2x^3$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.所以 $a\leqslant 16$.故选 A.

4.B　**解析**：由 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$，可得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$.由题意可得存在 $x>0$，使得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}<0$，即存在 $x>0$，使得 $x^2-bx+1<0$，等价于 $b>x+\frac{1}{x}$.由函数性质易得 $b>2$.故选 B.

5.C　**解析**：令 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，又 $e<a<b$，所以 $f(a)>f(b)$.故选 C.

6.C　**解析**：设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 **R** 上单调递减.因为 $a<x<b$，所以 $h(a)>h(x)>h(b)$，即 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)>f(b)-g(b)$，所以 $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$，$f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$，即选项 C 正确，D 错误，而选项 A 和 B 无法判断.

故选 C.

7.-3　**解析**：由题意可知 $f(x)=(x^2-1)(x+m)-1\times(-x)=x^3+mx^2-x-m+x=x^3+mx^2-m$，所以 $f'(x)=3x^2+2mx$.令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{2m}{3}$.因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,2)$，所以 $-\frac{2m}{3}=2$，解得 $m=-3$.

8.解：(1)因为 $a=1$，所以 $f(x)=x^3+x^2-x+2$，

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$，则 $f'(1)=4$.

又 $f(1)=3$，所以切点坐标为 $(1,3)$，

所以所求切线方程为 $y-3=4(x-1)$，即 $4x-y-1=0$.

(2)对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)\cdot(3x-a)$.

由 $f'(x)=0$，得 $x=-a$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

又 $a>0$，当 $-a<x<\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x<-a$ 或 $x>\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-a,\frac{a}{3}\right)$，单调递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$.

能力提升

1.B　**解析**：由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$，得 $f'(x)=x^2+2ax+1$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}f'(0)\geqslant 0,\\ f'(1)\leqslant 0,\\ f'(2)\leqslant 0,\\ f'(3)\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1\geqslant 0,\\ 1+2a+1\leqslant 0,\\ 4+4a+1\leqslant 0,\\ 9+6a+1\geqslant 0,\end{cases}$

解得$-\frac{5}{3}\leqslant a\leqslant-\frac{5}{4}$.所以实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right]$.故选B.

2.AD　**解析**:由$f(x)>-f'(x)$,得$e^xf(x)+e^xf'(x)>0$,即$[e^xf(x)]'>0$,所以函数$y=e^xf(x)$在**R**上单调递增,故$e^{2\,023}f(2\,023)<e^{2\,024}f(2\,024)$,所以$f(2\,023)<ef(2\,024)$,故A正确,B不正确;函数$y=e^xf(x)$在**R**上单调递增时,$f(x)$不一定单调递增,如$y=e^x\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{e}{2}\right)^x$在**R**上单调递增,但$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在**R**上单调递减,故C不正确;因为函数$y=e^xf(x)$在**R**上单调递增,所以当$t>0$时,有$e^xf(x)<e^{x+t}f(x+t)$,故有$f(x)<e^tf(x+t)$成立,故D正确.

3.B　**解析**:$f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$,

如果函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$在区间$[-1,2]$上单调,

那么$a-1\geqslant0$或$\begin{cases}f'(-1)\leqslant0,\\f'(2)\leqslant0,\end{cases}$

即$a\geqslant1$或$\begin{cases}1+2+a\leqslant0,\\4-4+a\leqslant0,\end{cases}$解得$a\geqslant1$或$a\leqslant-3$,

所以当函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$在区间$[-1,2]$上不单调时,$-3<a<1$.故选B.

4.$(1,+\infty)$　**解析**:令函数$g(x)=f(x)-\ln x$,$x>0$,则$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}<0$,因此函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,$g(e)=f(e)-\ln e=1$,因此$f(e^x)<x+1\Leftrightarrow f(e^x)-x<1\Leftrightarrow g(e^x)<g(e)$,即$e^x>e$,解得$x>1$,

所以不等式$f(e^x)<x+1$的解集为$(1,+\infty)$.

5.解:由已知得$a>\frac{1+\ln x}{x}$在$(1,+\infty)$上恒成立,

设$g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$,则$g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}<0(x>1)$.

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以$g(x)<g(1)$.

因为$g(1)=1$,所以$\frac{1+\ln x}{x}<1$在$(1,+\infty)$上恒成立.

所以$a\geqslant1$,即实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

6.解:(1)定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=1+\frac{a}{x}=\frac{x+a}{x}$.

①当$a\geqslant0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

②当$a<0$时,当$x\in(0,-a)$时,$f'(x)<0$,当$x\in(-a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,

即$f(x)$在$(0,-a)$上单调递减,在$(-a,+\infty)$上单调递增.

综上,当$a\geqslant0$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$a<0$时,$f(x)$在$(0,-a)$上单调递减,在$(-a,+\infty)$上单调递增.

(2)当$a=1$时,$g(x)=x+\ln x+\frac{1}{2}x^2+tx$,

$g'(x)=1+\frac{1}{x}+x+t$.

由题意$g'(x)\geqslant0$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立,

即$t\geqslant-x-\frac{1}{x}-1$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立.

因为$-x-\frac{1}{x}-1=-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\leqslant-2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}-1=-3$,所以$t\geqslant-3$,即实数$t$的取值范围为$[-3,+\infty)$.

自我超越

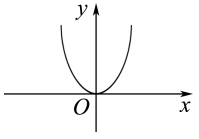
1.C　**解析**:由题可知$f(0)=1$,$f(4)=32$,$f'(x)=2^x\ln2+2x$,则$32-1=f'(t)(4-0)$,$t\in(0,4)$,即$f'(t)=\frac{31}{4}$.由指数函数$y=2^x$和一次函数$y=2x$的单调性可知$f'(x)=2^x\ln2+2x$在$[0,4]$上单调递增,又$f'(2)=4\ln2+4<3+4<\frac{31}{4}$,$f'(3)=8\ln2+6>8>\frac{31}{4}$,所以$t$所在的区间为$(2,3)$.故选C.

2.$[0,1]$　**解析**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,因为对$\forall x_1,x_2\in(a,a+1)$均满足$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,所以$f(x)$在$(a,a+1)$内单调递减.因为$f(x)=x^2-8\ln x$,所以$f'(x)=2x-\frac{8}{x}$,因为函数$f(x)$在$(a,a+1)$内单调递减,所以$f'(x)=2x-\frac{8}{x}\leqslant0$在$(a,a+1)$内恒成立.令$f'(x)=2x-\frac{8}{x}\leqslant0$,解得$x\in(0,2]$,所以$(a,a+1)\subseteq(0,2]$,所以$0\leqslant a\leqslant1$.

课后素养评价(二十)

基础落实

1.B　**解析**:画出$y=f(x)$的图象,如图所示,函数$f(x)$是偶函数,函数$f(x)$有一个极小值点.故选B.



2.A　**解析**:由题图可知$f(x)$在(a,b)内从左到右的单调性依次为增、减、增、减,根据极值点的定义可知在(a,b)内只有一个极小值点.故选A.

3.C　**解析**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)=2f'(1)\ln x-\frac{x}{3}$,$f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-\frac{1}{3}$,令$x=1$,可得$f'(1)=2f'(1)-\frac{1}{3}$,所以$f'(1)=\frac{1}{3}$,所以$f'(x)=\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}$.令$f'(x)=0$,可得$x=2$,当$0<x<2$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$x>2$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以$f(x)$的极大值点为2.故选C.

4.A　**解析**:$f'(x)=e^x+k$,因为函数$f(x)=e^x+kx$在$x=0$处有极值,所以$f'(0)=e^0+k=0$,解得$k=-1$.代入检验,满足题意.

5.D　**解析**:函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$在**R**上

无极值⇔$f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 **R** 上无变号零点⇔$\Delta=4m^2-4m\leqslant 0\Leftrightarrow 0\leqslant m\leqslant 1$.故选 D.

6.1　**解析**：$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-\frac{2}{x}+1=\frac{1}{x}(x+2)(x-1)$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$，

所以 $x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的极值点.

7.-24　**解析**：$f'(x)=3ax^2+6x-6a$，因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值 9，

所以 $\begin{cases}f'(2)=0,\\f(2)=9,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}12a+12-6a=0,\\8a+12-12a+b=9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-11,\end{cases}$

所以 $a+2b=-2-22=-24$.

8.$[0,8)$　**解析**：因为 $f(x)=(x^2-a)e^x$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有极小值，无极大值，所以 $f'(x)=(x^2+2x-a)e^x=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有一个函数值左负右正的实根，即关于 x 的方程 $x^2+2x-a=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有一个函数值左负右正的实根，所以 $\begin{cases}(-2)^2+2\times(-2)-a\leqslant 0,\\2^2+2\times 2-a>0,\end{cases}$ 得 $a\in[0,8)$.

9.解：因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$，所以 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2=3(x-c)\left(x-\frac{c}{3}\right)$.由 $f'(x)=0$，解得 $x=c$ 或 $x=\frac{c}{3}$.依题意，$c=1$ 或 $c=3$.当 $c=3$ 时，$f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值，与题意不符；当 $c=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.所以 $c=1$.所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{27}$.

能力提升

1.A　**解析**：因为 $f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-1$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $f'(1)=2f'(1)-1$，$f'(1)=1$，

所以 $f(x)=2\ln x-x$，$f'(x)=\frac{2}{x}-1$.

易知当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $x=2$ 是其极大值点，$f(x)_{极大值}=f(2)=2\ln 2-2$.

故选 A.

2.A　**解析**：$f'(x)=x-\sin x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$.

所以 $f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$.

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 有且仅有一个极小值.故选 A.

3.D　**解析**：由题图及题意知，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$.

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,2)$ 上单调递减，

因此函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值，在 $x=-2$ 时取得极大值.

故 A,B,C 错误，D 正确.故选 D.

4.B　**解析**：$f'(x)=x^2+2ax-2$，$\Delta=4a^2+8>0$，

令 $f'(x)=x^2+2ax-2=0$，由于 $x\in(1,3)$，

所以 $2a=\frac{2-x^2}{x}=\frac{2}{x}-x$，

$y=\frac{2}{x}-x$ 在 $(1,3)$ 上单调递减.当 $x=1$ 时，$y=1$；当 $x=3$ 时，$y=-\frac{7}{3}$.

由于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，

所以 $-\frac{7}{3}<2a<1$，即 $-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$.故选 B.

5.32　**解析**：$f'(x)=3x^2-4mx+m^2=(x-m)\cdot(3x-m)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=m$ 或 $x=\frac{m}{3}$.

由题设知 $m=2$ 或 $m=6$.

当 $m=2$ 时，极大值点为 $x=\frac{2}{3}$，与题意不符；

当 $m=6$ 时，极大值为 $f(2)=32$.

6.解：(1)因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)\cdot(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$.

(2)因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$.

因为 a，b，$\frac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，所以 $\frac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$.列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)\times(1+3)^2=-32$.

自我超越

1.$\left(\frac{1}{e},1\right)$　**解析**：(方法一：将函数零点问题转化为两个函数图象的交点问题)因为 $f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex$，

所以方程 $2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1，x_2，

即方程 $\ln a\cdot a^x=ex$ 的两个根为 x_1，x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点.

因为 $x=x_1$，$x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的

极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以在区间 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的上方；

在区间 (x_1,x_2) 上，$f'(x)>0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的下方.

当 $a>1$ 时，图象显然不符合题意，所以 $0<a<1$.

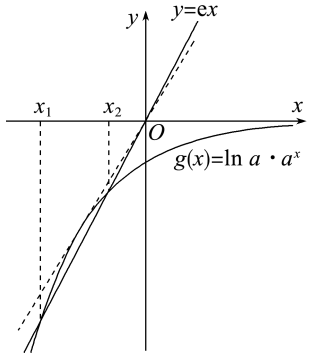
令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则 $g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x$，$0<a<1$，

如图，设过原点的直线与函数 $y=g(x)$ 的图象相切于点 $(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$.

则切线的斜率为 $g'(x_0)=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}(x-x_0)$.

则有 $-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$，则切线的斜率为 $(\ln a)^2\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=\mathrm{e}(\ln a)^2$.

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点，



所以 $\mathrm{e}(\ln a)^2<\mathrm{e}$，解得 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}$. 又 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$. 综上所述，$a$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.

（方法二：构造新函数，二次求导）$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

设函数 $g(x)=f'(x)=2(a^x\ln a-ex)$，则 $g'(x)=2a^x(\ln a)^2-2\mathrm{e}$.

若 $a>1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，则 $x_1>x_2$，不符合题意.

若 $0<a<1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，令 $g'(x_0)=0$，则 $a^{x_0}=\dfrac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}$，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，则需满足 $f'(x_0)>0$，$f'(x_0)=2(a^{x_0}\ln a-ex_0)=2\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\ln a}-ex_0\right)>0$，即 $x_0<\dfrac{1}{\ln a}$，$x_0\ln a>1$. 故 $x_0\ln a=\ln a^{x_0}=\ln\dfrac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}>1$，所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}$. 又因为 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.

2.解：(1) $f'(x)=1+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{(x-a)(x-1)}{x^2}$，

① 当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

② 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调递增，在 $(a,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

③ 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④ 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,a)$ 内单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,1)$，单调递增区间为 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,a)$，单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$.

(2) 已知 $a>1$，由(1)知 $f(x)_{极小值}=f(a)=a-1-(a+1)\ln a$.

令 $g(a)=a-1-(a+1)\ln a$，$a>1$，则 $g'(a)=1-\left(\ln a+\dfrac{a+1}{a}\right)=-\ln a-\dfrac{1}{a}<0$，

所以 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(3)=2-4\ln3$，所以 $a>3$.

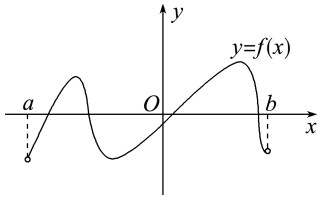
所以 a 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

课后素养评价（二十一）

基础落实

1.C　解析：由函数的最值与极值的概念，可知 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值. 故选 C.

2.A　解析：由导函数的图象可知原函数的大致图象如图所示.



对于 A，由于不能确定端点值与极小值的大小关系，同时端点值取不到，故 $f(x)$ 不一定有最小值，A 错误；

对于 B，由图象可知 $f(x)$ 只有一个极小值，B 正确；

对于 C，由图象可知 $f(x)$ 有两个极大值，C 正确；

对于 D，函数两个极大值与 0 的大小关系不确定，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上可能没有零点，D 正确.

故选 A.

3.D　解析：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,2)$，是开区间，若当 x 趋近于 -1 或 2 时，$f(x)$ 趋于正无穷大，则此

时函数 $f(x)$ 没有最大值，故 A，B 错误，D 正确；因为函数 $y=f(x)$ 有唯一的极大值 $f(1)$，所以在 $x=1$ 附近，函数值小于 $f(1)$，所以函数 $f(x)$ 的最小值不可能是 $f(1)$，故 C 错误.故选 D.

4.A　**解析**：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，所以 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $F(x)_{\max}=f(a)-g(a)$.故选 A.

5.C　**解析**：已知 $f(x)=x^2+a\ln x$，则 $f(1)=1^2+a\ln 1=1$，

且 $f'(x)=2x+\dfrac{a}{x}$，所以 $f'(1)=2+a$，

所以 $f'(1)=\dfrac{f(1)-0}{1-0}=1=2+a$，解得 $a=-1$，

所以 $f(x)=x^2-\ln x(x>0)$，

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$.

令 $f'(x)>0$，即 $2x-\dfrac{1}{x}>0$，解得 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

令 $f'(x)<0$，即 $2x-\dfrac{1}{x}<0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以函数在区间 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

故选 C.

6.A　**解析**：由题意，函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}+2ax-3$ 且 $f'(2)=0$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$，

则 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-3=\dfrac{x^2-3x+2}{x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$，

所以当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $0<x<1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{3},1\right)$ 和 $(2,3]$ 上单调递增，在 $(1,2]$ 上单调递减.

又因为 $\ln 3>\ln e=1$，所以 $2\ln 3>2$，所以 $2\ln 3-\dfrac{9}{2}>2-\dfrac{9}{2}$，

所以 $f(3)=2\ln 3-\dfrac{9}{2}>f(1)=-\dfrac{5}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ 上的最大值是 $2\ln 3-\dfrac{9}{2}$.

故选 A.

7.A　**解析**：$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$，

$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<2$，$f'(x)<0\Rightarrow x<0$ 或 $x>2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(2)=3$.

要使 $f(x)$ 在 $(m,m+5)$ 上有最大值，则极大值 3 即为该最大值，

则 $2\in(m,m+5)\Rightarrow\begin{cases}m<2,\\m+5>2\end{cases}\Rightarrow -3<m<2$.

又 $f(x)=3\Rightarrow -x^3+3x^2-1=3\Rightarrow x^3-3x^2+4=0\Rightarrow (x-2)^2(x+1)=0\Rightarrow x=2$ 或 $x=-1$，

所以 $m\geqslant -1$.

综上，$-1\leqslant m<2$.

故选 A.

8.(1)**解**：由 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1(x>0)$，得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=0$.

(2)**证明**：由(1)知，$f(x)\geqslant 0$，即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，从而 $x\ln x\geqslant x-1$，即 $x\ln x+1\geqslant x$①.

又 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，得 $\ln\dfrac{1}{x}\geqslant 1-x$，从而 $\dfrac{1}{x}\geqslant e^{1-x}$，$xe^{1-x}\leqslant 1$，$x^2e^{1-x}\leqslant x$，

$-x^2e^{1-x}\geqslant -x$②.

由①②得 $x\ln x-x^2e^{1-x}+1\geqslant 0$.

能力提升

1.A　**解析**：因为 $f(x)=-x^3+3ax^2+2$，则 $f'(x)=-3x^2+6ax$，由已知可得 $f'(2)=-12+12a=0$，解得 $a=1$，

则 $f(x)=-x^3+3x^2+2$，$f'(x)=-3x^2+6x$，由 $f'(x)=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=2$，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

当 $x\in[1,3]$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，在 $[2,3]$ 上单调递减，且 $f(1)=4$，$f(3)=2$，则 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值为 2.故选 A.

2.A　**解析**：由题意可得 $|AB|=|f(a)-g(a)|=|e^a-a|$.

令函数 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-x$，则 $h'(x)=e^x-1$.

由 $h'(x)<0$ 可得 $x<0$，由 $h'(x)>0$ 可得 $x>0$，所以，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以，$h(x)_{\min}=h(0)=1$，即 $|AB|$ 的最小值为 1，此时 $a=0$.故选 A.

3.AB　**解析**：因为 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$，所以 $f'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $f'(x)=3x^2+6x-9=0$，解得 $x_1=-3$，$x_2=1$，

所以在 $(-\infty,-3)$ 和 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在 $(-3,1)$ 上，$f'(x)<0$.所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3,1)$ 上单调递减.

则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以在 $[1,2]$ 上，$f(2)$ 最大；

$f(x)$ 在 $(-3,1)$ 上单调递减，所以在 $[-3,1]$ 上，

$f(-3)$最大；

$f(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递增，所以在$(-\infty,-3]$上，$f(-3)$最大.

因为$f(2)=3$，$f(-3)=28$，且$f(x)$在区间$(k,2]$上的最大值为28，

所以$k<-3$，即k的取值范围是$(-\infty,-3)$.故选AB.

4.A　**解析**：由题意，函数$f(x)=(x-1)e^x$在区间$(-\infty,1)$上有$f(x)_{max}-f(x)_{min}\leqslant t$.

因为$f(x)=(x-1)e^x$，所以$f'(x)=xe^x$，且$x\in(-\infty,1)$.

由$f'(x)<0$，可得$x<0$；由$f'(x)>0$，可得$0<x<1$.

所以函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,1)$上单调递增，

所以函数的最小值为$f(0)=-1$.

又当$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)=(x-1)e^x<0$，

而$f(1)=0$，

所以$-1\leqslant f(x)<0$，所以$t\geqslant 1$，即t的最小值是1.

故选A.

5.C　**解析**：由题意可知，两个函数图象都在x轴上方，判断可知，虚线部分为$y=f'(x)$，实线部分为$y=f(x)$，则A，B显然错误；对于C，D，易得$y'=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由题图可知，当$x\in(-\infty,0)$时，$y'>0$，$y=\frac{f(x)}{e^x}$单调递增，当$x\in(0,+\infty)$时，$y'<0$，$y=\frac{f(x)}{e^x}$单调递减，所以函数$y=\frac{f(x)}{e^x}$在$x=0$处取得最大值为1.故选C.

6.AD　**解析**：令$g(x)=f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$，则$g'(x)=-2e^x\sin x$.因为当$x\in(0,\pi)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，所以$f'(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，无极值，故A正确，B错误.又$f'(0)=0$，故当$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，无最值，故C错误，D正确.故选AD.

7.解：(1)当$a=1$时，函数$f(x)=x^2e^{-x}$，求导得$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$，则$f'(1)=\frac{1}{e}$，而$f(1)=\frac{1}{e}$，

所以函数$f(x)$的图象在$x=1$处的切线方程为$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x-1)$，即$x-ey=0$.

(2)函数$f(x)=x^2e^{-ax}$，当$a>0$且$x>0$时，不等式$f(x)\leqslant\frac{4}{ae}\Leftrightarrow\frac{x^2}{e^{ax}}-\frac{4}{ae}\leqslant 0$恒成立.

令函数$g(x)=\frac{x^2}{e^{ax}}-\frac{4}{ae}$，$x>0$，求导得$g'(x)=\frac{2x-ax^2}{e^{ax}}$.

由$g'(x)>0$，得$0<x<\frac{2}{a}$；由$g'(x)<0$，得$x>\frac{2}{a}$，

函数$g(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$内单调递增，在$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递减，

所以$g(x)_{max}=g\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{4}{a^2e^2}-\frac{4}{ae}$.

依题意，$\frac{4}{a^2e^2}-\frac{4}{ae}\leqslant 0$，解得$a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以正实数a的取值范围是$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

8.(1)**解**：因为$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{a}{x}$，

所以$f'(x)=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$，$g'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{a}{x^2}$.

由题意得$f'(1)=g'(1)$，

所以$\frac{1}{2}=a-\frac{1}{2}$，解得$a=1$.

(2)**证明**：由(1)知，$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}$，

所以$f(x)-g(x)=\frac{\ln x}{x+1}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x\ln x-x+1}{x(x+1)}$，$x>0$.

令$h(x)=x\ln x-x+1$，$x>0$，则$h'(x)=\ln x$.

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

故当$x=1$时，$h(x)$取得最小值$h(1)=0$，所以$h(x)\geqslant 0$.

因为$x>0$，所以$x(x+1)>0$，即$f(x)-g(x)\geqslant 0$，所以$f(x)\geqslant g(x)$在$(0,+\infty)$上恒成立.

9.解：(1)设$x\in(0,1]$，则$-x\in[-1,0)$，$f(-x)=-2ax+\frac{1}{x^2}$.

因为$f(x)$是奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$，

所以$f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$，$x\in(0,1]$.

(2)当$a>-1$时，$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.证明如下：

当$x\in(0,1]$时，$f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$，

$f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}=2\left(a+\frac{1}{x^3}\right)$.

因为$a>-1$，$x\in(0,1]$，$\frac{1}{x^3}\geqslant 1$，

所以$a+\frac{1}{x^3}>0$，即$f'(x)>0$.

所以当$a>-1$时，$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.

(3)当$x\in(0,1]$时，$f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$，由(2)知当$a>-1$时，$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.

由$f(x)_{max}=f(1)=-6$，得$a=-\frac{5}{2}$(不合题意，舍去)；

当$a\leqslant -1$时，令$f'(x)=2\left(a+\frac{1}{x^3}\right)=0$，得$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$.

列表如下：

x	$\left(0,\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$	$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}},1\right)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

可知 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)=-6$，解得 $a=-2\sqrt{2}$.

此时 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1]$.

所以存在 $a=-2\sqrt{2}$，使得 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上有最大值 -6.

自我超越

1.$[-1,1]$　**解析**：因为 $f(x)=x^3-3x$，所以 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，令 $f'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 得 $-1<x<1$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，所以 -1 和 1 为函数 $f(x)$ 的极值点，当 $x=1$ 时，$f(1)=-2$，当 $x=-1$ 时，$f(-1)=2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域可以为 $[-1,1]$.

2.$e^{-\frac{1}{e}}$　**解析**：因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $f(x)=x^x>0$ 恒成立.令 $g(x)=\ln f(x)=x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=\ln x+1$.

由 $g'(x)=0$，得 $x=e^{-1}$，当 $x\in(0,e^{-1})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 内单调递减，当 $x\in(e^{-1},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(e^{-1},+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=e^{-1}\ln e^{-1}=-e^{-1}$，即 $\ln f(x)$ 的最小值为 $-e^{-1}$.又 $y=\ln f(x)$ 为增函数，所以 $g(x)_{\min}=\ln[f(x)_{\min}]=-e^{-1}$，即 $f(x)_{\min}=e^{-e^{-1}}=e^{-\frac{1}{e}}$.

课后素养评价(二十二)

基础落实

1.C　**解析**：设利润为 y，则 $y=pq-C=\left(101-\frac{1}{6}q^2\right)q-(100+3q)=-\frac{1}{6}q^3+98q-100$，因为 $y'=-\frac{1}{2}q^2+98$，所以当 $0<q<14$ 时，$y'>0$，函数单调递增，当 $q>14$ 时，$y'<0$，函数单调递减，故利润最大时，$q=14$.故选 C.

2.D　**解析**：由题图可知，当 $1<x<2$ 或 $4<x<5$ 时，$f'(x)>0$，当 $2<x<4$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 和 $(4,5)$ 内单调递增，在 $(2,4)$ 内单调递减，所以 $x=2$ 为极大值点，$x=4$ 为极小值点，所以 A，B，C 正确；函数 $f(x)$ 在 $(1,5)$ 上不一定有最大值，所以 D 错误.故选 D.

3.A　**解析**：由于函数的最值可能在区间 $[a,b]$ 的端点处取得，也可能在区间 (a,b) 内取得，故当在区间 (a,b) 内取得时，最值必是相应的极值，如 $y=x^2$，$x\in[-1,2]$，当 $x=0$ 时，取得最小值，当 $x=2$ 时，取得最大值.而当最值在区间端点处取得时，其最值必不是极值，因此命题①②③都不正确.故选 A.

4.A　**解析**：当 $x<0$ 时，$f(x)=2x-\ln(-x)$，

$f'(x)=2-\frac{1}{-x}\cdot(-1)=2-\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 B，D 错误；当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，$f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，故 A 正确.

5.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析**：设正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面边长为 a.

因为 $PA=4$，所以 $\frac{a^2}{2}+h^2=16$，即 $a^2=32-2h^2$.

所以正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{32}{3}h-\frac{2}{3}h^3$ $(0<h<4)$.

所以 $V'=\frac{32}{3}-2h^2$.

令 $V'=0$，解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $0<h<\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$V'>0$，所以函数在 $\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增；

当 $\frac{4\sqrt{3}}{3}<h<4$ 时，$V'<0$，所以函数在 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$ 上单调递减.

所以当 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积取得最大值.

6.$\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$　**解析**：由 $2x^2+a-\ln x<0$ 有解，得 $a<\ln x-2x^2$ 有解.

令 $f(x)=\ln x-2x^2$ $(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}$ $(x>0)$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

7.解：(1)函数定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2a^2x+a-\frac{3}{x}=\frac{2a^2x^2+ax-3}{x}=\frac{(2ax+3)(ax-1)}{x}$.

令 $f(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=-\frac{3}{2a}$.

因为 $a>0$，$x>0$，所以 $-\frac{3}{2a}<0<\frac{1}{a}$，

所以在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},\right.$

$+\infty\Big)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上所述，$f(x)$在$\Big(0,\frac{1}{a}\Big)$上单调递减，在$\Big(\frac{1}{a},+\infty\Big)$上单调递增.

(2)由(1)可知，$f(x)_{\min}=f\Big(\frac{1}{a}\Big)=a^2\times\Big(\frac{1}{a}\Big)^2+a\times\frac{1}{a}-3\ln\frac{1}{a}+1=3+3\ln a$.

又$f(1)=a^2+a+1>0$，且$y=f(x)$的图象与x轴没有公共点，

所以$y=f(x)$的图象在x轴的上方，所以$3+3\ln a>0$，所以$a>\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以a的取值范围为$\Big(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\Big)$.

能力提升

1.B **解析**：由题图可知，所选函数为偶函数，且在图象对称轴右侧附近单调递减.

对于A选项，函数$f(x)=x\sin x-\cos x$的定义域为$\mathbf{R}$，

$f(-x)=(-x)\sin(-x)-\cos(-x)=x\sin x-\cos x=f(x)$，所以函数$f(x)=x\sin x-\cos x$为偶函数，$f'(x)=x\cos x+2\sin x$，

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=x\cos x+2\sin x>0$，

则函数$f(x)$在$\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)$上单调递增，A不满足；

对于B选项，函数$f(x)=\cos x-x\sin x$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=\cos(-x)-(-x)\sin(-x)=\cos x-x\sin x=f(x)$，所以函数$f(x)=\cos x-x\sin x$为偶函数，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x$，当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x<0$，则函数$f(x)$在$\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)$上单调递减，B满足；

对于C选项，函数$f(x)=x^2+2\cos x$的定义域为$\mathbf{R}$，且为偶函数，$f'(x)=2x-2\sin x$，令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=2-2\cos x\geqslant 0$且$g'(x)$不恒为零，

所以$f'(x)$在定义域上单调递增，

当$x>0$时，$f'(x)=2x-2\sin x>f'(0)=0$，则函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，C不满足；

对于D选项，函数$f(x)=\sin x-x\cos x$的定义域为$\mathbf{R}$，则$f(-x)=\sin(-x)-(-x)\cos(-x)=x\cos x-\sin x=-f(x)$，

所以函数$f(x)=\sin x-x\cos x$为奇函数，D不满足.

2.B **解析**：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b$.

因为$f(x)$图象在任意一点处的切线的斜率都大于0，

所以$f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b>0$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立.

所以$b>-\frac{2}{x}-8x$.

设$g(x)=-\frac{2}{x}-8x$，则$b>g(x)_{\max}$，$g'(x)=\frac{2}{x^2}-8$.

令$g'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}$，负根舍去.

所以当$x\in\Big(0,\frac{1}{2}\Big)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当$x\in\Big(\frac{1}{2},+\infty\Big)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

所以当$x=\frac{1}{2}$时，$g(x)$取得最大值，最大值为$g\Big(\frac{1}{2}\Big)=-8$，

所以$b>-8$.故选B.

3.AC **解析**：对于A，B，因为$f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2-x+1)+\mathrm{e}^x(2x-1)=\mathrm{e}^x(x^2+x)$，

所以当$x\in(-\infty,-1)$或$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$上单调递增，

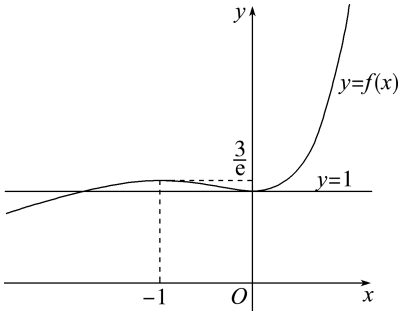
当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$f(x)$的极大值为$f(-1)=\mathrm{e}^{-1}[(-1)^2-(-1)+1]=3\mathrm{e}^{-1}$，

$f(x)$的极小值为$f(0)=\mathrm{e}^0(0-0+1)=1$，故A正确，B错误；

对于C，由函数单调性知，$f(x)$在$[-2,-1)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,2]$上单调递增，且$f(-1)=3\mathrm{e}^{-1}$，$f(2)=\mathrm{e}^2(4-2+1)=3\mathrm{e}^2$，$3\mathrm{e}^{-1}<3\mathrm{e}^2$，故函数$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为$3\mathrm{e}^2$，故C正确；

对于D，当$x\to-\infty$时，$f(x)\to 0$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，且$f(x)$的极大值为$f(-1)=3\mathrm{e}^{-1}>0$，$f(x)$的极小值为$f(0)=1>0$，由上述分析可知，$f(x)$的图象如图所示.



由图象可得当$0<k<1$或$k>\frac{3}{\mathrm{e}}$时，$f(x)=k$有1个实数根，

当$k=1$或$k=\frac{3}{\mathrm{e}}$时，$f(x)=k$有2个实数根，

当$1<k<\frac{3}{\mathrm{e}}$时，$f(x)=k$有3个实数根，故D错误.

故选AC.

4.C **解析**：海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比，设船速为x n mile/h$(0<x\leqslant 30)$，每小时的燃料费用为W元，比例系数为k，则满足$W=kx^3$.

当速度为10 n mile/h时，它每小时的燃料费是25元，代入上式可得$25=k\times 10^3$，解得$k=\frac{1}{40}$.

若甲、乙两地相距800 n mile，则所需时间为$\frac{800}{x}$ h.

所以总费用为 $f(x)=\left(\frac{1}{40}x^3+400\right)\times\frac{800}{x}=\frac{20x^3+320\,000}{x}(0<x\leqslant 30)$，

所以 $f'(x)=\frac{40\times(x^3-8\,000)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=20$.

当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,20)$ 上单调递减；

当 $20<x\leqslant 30$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(20,30]$ 上单调递增.

所以当 $x=20$ 时，海轮从甲地航行到乙地的总费用最低.故选 C.

5.4　**解析**：设该商场每日销售该商品所获得的利润为 $f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=2+10(x-3)\cdot(x-6)^2$，$3<x<6$，

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)\cdot(x-6)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=4$ 或 $x=6$(舍去).

所以函数 $f(x)$ 在 $(3,4)$ 上单调递增，在 $(4,6)$ 上单调递减，

所以当 $x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(4)=42$.

故当销售价格为 4 元/kg 时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

6.解：(1)不满足条件.理由如下：当 $m=13$ 时，函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{13}{x}+4$，可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{13}{x^2}>0$.

所以 $f(x)$ 在 $[4,8]$ 上单调递增，满足条件①.

又因为 $f(4)=\frac{7}{4}<2=\frac{1}{2}\times 4$，所以当 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件②.

综上，当使用参数 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件.

(2)由函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$，

可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{m}{x^2}=\frac{x^2+4m}{4x^2}$.

所以当 $m\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，满足条件①.

当 $m<0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=2\sqrt{-m}$.

当 $x\in[2\sqrt{-m},+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $2\sqrt{-m}\leqslant 4$，解得 $-4\leqslant m<0$.

综上，$m\geqslant -4$ 时，$f'(x)>0$，满足条件①.

由条件②可知，$f(x)\geqslant\frac{x}{2}$，即不等式 $\frac{x}{4}+\frac{m}{x}\leqslant 4$ 在 $[4,8]$ 上恒成立，

等价于 $m\leqslant-\frac{1}{4}x^2+4x=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在 $[4,8]$ 上恒成立.

函数 $y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在 $[4,8]$ 上单调递增，

当 $x=4$ 时，$y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 取得最小值 12，所以 $m\leqslant 12$.

综上，使用参数 m 的取值范围是 $[-4,12]$.

自我超越

(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，

$f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去).

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得的极小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

(2)**证明**：设 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3$，

则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2$

$=\frac{-2x^3+x^2+1}{x}$

$=\frac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$F'(x)\leqslant 0$，

故 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $F(1)=-\frac{1}{6}<0$，

所以在区间 $[1,+\infty)$ 上，$F(x)<0$ 恒成立，

即 $f(x)<g(x)$ 恒成立.

因此当 $a=1$ 时，在区间 $[1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象的下方.

微专题培优集训(四)

1.解：(1)因为 $f(x)=(x+a)e^x$ 在 $x=2$ 处取得极值，所以 2 为 $f'(x)$ 的变号零点.

函数 $f(x)=(x+a)e^x$ 的定义域为 **R**，$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$，

所以 $f'(2)=(a+3)e^2=0$，得 $a=-3$.

此时，$f'(x)=(x-2)e^x$，当 $x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，符合题意.故实数 a 的值为 -3.

(2)因为 $e^x>0$，所以 $f(x)<e^{2x}$ 可转化为 $x+a<e^x$，即 $a<e^x-x$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x-x$，则 $g'(x)=e^x-1$，

令 $g'(x)=0$，可得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$，所以 $a<1$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

2.解：(1)因为 $f(x)=\ln(ax)+x(a<0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1$.

由 $f'(x)=\frac{1}{x}+1=0$，可得 $x=-1$，所以直线 $y=-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 的切点坐标为 $(-1,-1)$，

故 $f(-1)=\ln(-a)-1=-1$，解得 $a=-1$.

(2)因为 $a<0$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

由 $f'(x)=\frac{x+1}{x}<0$，可得 $-1<x<0$，由 $f'(x)=\frac{x+1}{x}>0$，可得 $x<-1$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，单调递减区间为 $(-1,0)$.

(3)由(2)可得 $f(x)_{\max}=f(-1)=\ln(-a)-1\leqslant 0$，解得 $a\geqslant -\mathrm{e}$.

又 $a<0$，故实数 a 的取值范围是 $[-\mathrm{e},0)$.

3.解：(1)由题设得 $f'(x)=ax+2a-1-\frac{2}{x}=\frac{ax^2+(2a-1)x-2}{x}=\frac{(ax-1)(x+2)}{x}$，且 $x\in(0,+\infty)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$，

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递减；当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述，所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递减.

(2)由题设知 $f(x)_{\min}\geqslant b_{\min}=2$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立.

当 $a<1$ 时，此时 $f(1)=\frac{5a}{2}-1<2$，不合题设，舍去.

当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增，只需 $f(1)=\frac{5a}{2}-1\geqslant 2\Rightarrow a\geqslant\frac{6}{5}$，符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{6}{5},+\infty\right)$.

微专题培优集训(五)

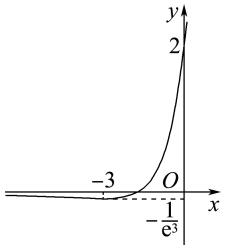
1.解：(1)由题可得 $f'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，故 $x<-3$ 时有 $f'(x)<0$，$x>-3$ 时有 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(-3)=-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

当 x 趋于 $-\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 0，当 x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 $+\infty$，故 $f(x)\in\left[-\frac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$.

综上，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-3)$，单调递增区间为 $(-3,+\infty)$，最小值为 $-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$，无最大值.

(2)由(1)分析，可得 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知，当 $k<-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$ 时，$f(x)=k$ 无解；当 $-\frac{1}{\mathrm{e}^3}<k<0$ 时，$f(x)=k$ 有两个不同解；当 $k=-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$ 或 $k\geqslant 0$ 时，$f(x)=k$ 有且仅有一个解.

2.解：(1)由 $f(x)=\frac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$，$x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\mathrm{e}^x-(\ln x+1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x+1)}{\mathrm{e}^x}$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-(\ln x+1)$，则 $h'(x)=-\frac{1+x}{x^2}<0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，即当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，无最小值.

(2)函数 $g(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$ 的零点个数就是方程 $a\mathrm{e}^x-\ln x-1=0$ 的解的个数，

整理得 $a=\frac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$，即 $a=f(x)=\frac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$，$x\in(0,+\infty)$.

由(1)可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，

当 x 趋近于 0 时，$f(x)$ 趋近于 $-\infty$；当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 大于 0 且趋近于 0；

所以当 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $g(x)$ 没有零点；当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $a\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 只有一个零点；当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点.

质量评估(一)

1.D **解析**:因为 $a_1=2,a_{n+1}=a_n+n$,

所以 $a_2=a_1+1=2+1=3,a_3=a_2+2=3+2=5$,

$a_4=a_3+3=5+3=8$.故选 D.

2.A **解析**:设数列$\{a_n\}$的公差为 d,

因为 3^{a_1},3,3^{a_7} 成等比数列,所以 $3^{a_1}3^{a_7}=3^2$,

所以 $a_1+a_7=2$,即 $2a_1+6d=2$,

所以 $a_1+3d=a_4=1$.

故选 A.

3.D **解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q,q\neq0$,

依题意得$\begin{cases}a_2=2,\\2a_3=a_2+a_4-2,\end{cases}$

则$\begin{cases}a_1q=2,\\2a_1q^2=a_1q+a_1q^3-2,\end{cases}$

所以 $2(a_1q)q=a_1q+(a_1q)q^2-2$,

所以 $4q=2+2q^2-2$,

所以 $2q^2-4q=0$,

解得 $q=2$,则 $a_1=1$,所以 $S_5=\dfrac{1\times(1-2^5)}{1-2}=31$.

故选 D.

4.A **解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

$a_3+2a_4+a_{13}=4a_1+20d=160,a_1+5d=40$,

$S_{11}-5a_6=11a_1+55d-5(a_1+5d)=6a_1+30d=6(a_1+5d)=6\times40=240$.

故选 A.

5.A **解析**:因为 $\dfrac{1}{1+a_3}=\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{1+a_5}=\dfrac{1}{2}$,设数列$\left\{\dfrac{1}{1+a_n}\right\}$的公差为 d,则$\begin{cases}\dfrac{1}{1+a_1}+2d=\dfrac{1}{3},\\\dfrac{1}{1+a_1}+4d=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\dfrac{1}{1+a_1}=\dfrac{1}{6},\\d=\dfrac{1}{12}.\end{cases}$所以$\dfrac{1}{1+a_n}=\dfrac{1}{6}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{12}$,

所以$\dfrac{1}{1+a_{11}}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{11-1}{12}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}=1$,所以 $a_{11}=0$.

故选 A.

6.B **解析**:必要性成立:因为 $a_1>0$,由等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$ 可知,$a_5=a_1+4d>0$;

充分性不成立:例如,由 $a_1=5,a_5=1$ 得 $d=-1$.

所以"$a_5>0$"是"$d>0$"的必要不充分条件.故选 B.

7.B **解析**:依题意,数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant2)$,$a_1=2$,则$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$,

所以 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=n(n+1)$,

$a_1=2$ 也符合上式,所以 $a_n=n(n+1)$,$\{a_n\}$是递增数列.

由 $a_n=n(n+1)<930$,得$(n+31)(n-30)<0$,解得$-31<n<30$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最大值为 29.

故选 B.

8.B **解析**:因为 $a_1=1,a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{3}a_n^2=-\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{3}{4}$,所以 $a_n\leqslant\dfrac{3}{4}(n\geqslant2)$,易知 $a_n\neq0$.

由$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{1}{3}a_n\geqslant\dfrac{3}{4}>0(n\geqslant2)$,得 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$.

由题意,$a_{n+1}=a_n\left(1-\dfrac{1}{3}a_n\right)$,即$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n(3-a_n)}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{3-a_n}$,

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3-a_n}>\dfrac{1}{3}$,即$\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}>\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}>\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_3}>\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}>\dfrac{1}{3}(n\geqslant2)$,

累加可得$\dfrac{1}{a_n}-1>\dfrac{1}{3}(n-1)$,即$\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{3}(n+2)(n\geqslant2)$,

所以 $a_n<\dfrac{3}{n+2}(n\geqslant2)$,即 $a_{100}<\dfrac{1}{34}$,$100a_{100}<\dfrac{100}{34}<3$.

又 $a_1=1$,所以 $a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3-a_n}\leqslant\dfrac{1}{3-\dfrac{3}{n+2}}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以$\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}\leqslant\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right),\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}\leqslant\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right),\dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_3}\leqslant\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right),\cdots,\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}\leqslant\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$,

累加可得$\dfrac{1}{a_n}-1\leqslant\dfrac{1}{3}(n-1)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$,

所以$\dfrac{1}{a_{100}}-1\leqslant33+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{100}\right)<33+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4+\dfrac{1}{6}\times96\right)=39$,

即$\dfrac{1}{a_{100}}<40$,所以 $a_{100}>\dfrac{1}{40}$,即 $100a_{100}>\dfrac{5}{2}$.

综上,$\dfrac{5}{2}<100a_{100}<3$.故选 B.

9.BC **解析**:若 $S_n=n^2-1$,则有 $a_1=S_1=0,a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=3,a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=5,2a_2\neq a_1+a_3$,此时数列$\{a_n\}$不是等差数列,故 A 错误;

若 $S_n=2^n-1$,则当 $n\geqslant2$ 时,有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$,当 $n=1$ 时,有 $a_1=S_1=1$,满足上式,此时$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$,数列$\{a_n\}$是等比数列,故 B 正确;

由等差数列的性质可得 $S_{99}=\dfrac{99(a_1+a_{99})}{2}=99a_{50}$,故 C 正确;

当 $a_1>0,q=1$ 时,有 $a_n=a_1,S_{2n-1}S_{2n+1}=(2n-1)\cdot$

$(2n+1)a_1^2=(4n^2-1)a_1^2$，

$S_{2n}^2=(2na_1)^2=4n^2a_1^2$，此时 $S_{2n-1}S_{2n+1}<S_{2n}^2$，故 D 错误.故选 BC.

10.BD　**解析**：依题意，$a_n>0$，$q>0$，$0<a_1<1$，

由于$(a_{2\,023}-1)(a_{2\,024}-1)<0$，

所以$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1\end{cases}$或$\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1.\end{cases}$

若$\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1,\end{cases}$则 $0<q<1$，则 $0<a_1q^{2\,022}<1\Rightarrow a_{2\,023}<1$，矛盾，

所以$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$则 $q>1$，故 A 错误.

$a_{2\,023}a_{2\,025}=(a_{2\,024})^2>1$，故 B 正确.

由于$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$所以 T_n 的最小值为 $T_{2\,023}$，即 $T_n\geqslant T_{2\,023}$，故 C 错误.

$T_{4\,047}=(a_1\times a_{4\,047})\cdot(a_2\times a_{4\,046})\cdot\cdots\cdot(a_{2\,023}\times a_{2\,025})\cdot a_{2\,024}=(a_{2\,024})^{4\,047}>1$，

由于 $a_{2\,023}+a_{2\,024}<2$，

所以 $2>a_{2\,023}+a_{2\,024}>2\sqrt{a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}}$，

所以 $a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}<1$，

所以 $T_{4\,046}=(a_1\times a_{4\,046})^{2\,023}=(a_{2\,023}\times a_{2\,024})^{2\,023}<1$.

由于 $q>1$，且$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$所以当 $n\leqslant 4\,046$ 时，$T_n\leqslant T_{4\,046}<1$.

综上所述，使得 $T_n>1$ 的最小正整数 n 为 4 047，故 D 正确.

故选 BD.

11.ABD　**解析**：由题意知数列$\{b_n\}$为 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1},2^{m-1},\cdots,2^3,2^2,2,1$.

若 $m=50$，则 $S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^{50})}{1-2}=2^{51}-2$，故 B 正确；

若 $51\leqslant m<100$，则 $S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^m)}{1-2}-\dfrac{1\times(1-2^{2m-100})}{1-2}=2^{m+1}-2^{2m-100}-1$，故 D 正确；

若 $m\geqslant 100$，则 $S_{100}=\dfrac{1\times(1-2^{100})}{1-2}=2^{100}-1$，故 A 正确.

故选 ABD.

12.$\dfrac{1}{3}$　**解析**：依题意，$a_n=\begin{cases}\dfrac{10}{3}-n(n\leqslant 3,n\in\mathbf{N}^*),\\n-\dfrac{10}{3}(n\geqslant 4,n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$

当 $n\leqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，最小值为 $a_3=\dfrac{1}{3}$；

当 $n\geqslant 4$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，最小值为 $a_4=\dfrac{2}{3}$.

综上所述，a_n 的最小值为$\dfrac{1}{3}$.

13.$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$　**解析**：由题意可知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n+1$，

故 $a_{n+1}-a_n=n+1$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2+2+3+\cdots+n=2+\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$，$a_1=2$ 符合该式，所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

14.$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$　64　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q $(q\neq 0)$，由 $a_1+a_2=12$，$a_1-a_3=6$，得$\begin{cases}a_1+a_1q=12,\\a_1-a_1q^2=6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=8,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $a_n=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$.

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3-2-1+0+1+\cdots+(n-4)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-7)}{2}}$.

令 $f(n)=\dfrac{1}{2}n(n-7)=\dfrac{1}{2}(n^2-7n)=\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{8}$，

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，$f(n)$有最小值，即 $f(n)_{\min}=-6$，

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的最大值为$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6}=64$.

15.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

依题意，$\begin{cases}S_4=-90,\\a_{10}=15,\end{cases}$即$\begin{cases}4a_1+6d=-90,\\a_1+9d=15,\end{cases}$

解得 $a_1=-30$，$d=5$，

所以 $a_n=-30+(n-1)\times 5=5n-35$.

(2)由 $a_n=5n-35\leqslant 0$，解得 $1\leqslant n\leqslant 7$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $n=6$ 或 $n=7$ 时，S_n 取得最小值，

且 S_n 的最小值为 $S_6=6a_1+15d=-180+75=-105$.

16.解：(1)由题意 $a_1=S_1=3^{1+1}+2\times 1-3=8$，

当 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}+2n-3)-(3^n+2n-5)=2\cdot 3^n+2$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2\times 3^1+2=8$ 也满足上式.

综上所述，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\cdot 3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)可知 $a_n=2\cdot 3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，所以由题意得 $c_n=\dfrac{n(a_n-2)}{2}=n\cdot 3^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $T_n=1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n$，

$3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+n\times 3^{n+1}$，

两式相减得 $-2T_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}=\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$，

所以数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 $T_n=\dfrac{6n-3}{4}\cdot 3^n+\dfrac{3}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

17.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

若选①，$a_3=5$，$a_5+a_7=22$，

则$\begin{cases}a_1+2d=5,\\2a_1+10d=22,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=2n-1$.

若选②，$a_1=1$，$S_5=25$，则$\begin{cases}a_1=1,\\5a_1+\dfrac{5\times(5-1)}{2}d=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=2n-1$.

若选③，$S_n=n^2$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_n=2n-1$ 也成立，所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知 $a_n=2n-1$，

$$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

所以 T_n

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

18.(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

而 $b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

则 $b_1=a_1-6$，$b_2=2a_2=2a_1+2d$，$b_3=a_3-6=a_1+2d-6$，

于是$\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32,\\T_3=4a_1+4d-12=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n+3$.

(2)**证明**：由(1)知，$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，

$b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{ 为奇数},\\4n+6,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

当 n 为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$，

$b_1+b_2=13$，则 $T_n=\dfrac{13+(6n+1)}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n\right)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$；

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3}{2}(n+1)^2+\dfrac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5\right)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$.

综上所述，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.(1)**证明**：由 $S_{n+1}=2S_n+1$，得 $S_{n+1}+1=2(S_n+1)$，又 $S_1+1=a_1+1=2$，则$\dfrac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$，

所以$\{S_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

则 $S_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，即 $S_n=2^n-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

又 $a_1=1$，符合 $a_n=2^{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**解**：$b_n=[\lg a_n]=[\lg 2^{n-1}]$，

若$[\lg 2^{n-1}]=0$，则 $0\leqslant\lg 2^{n-1}<1$，得 $1\leqslant n\leqslant 4$；

若$[\lg 2^{n-1}]=1$，则 $1\leqslant\lg 2^{n-1}<2$，得 $5\leqslant n\leqslant 7$；

若$[\lg 2^{n-1}]=2$，则 $2\leqslant\lg 2^{n-1}<3$，得 $8\leqslant n\leqslant 10$；

若$[\lg 2^{n-1}]=3$，则 $3\leqslant\lg 2^{n-1}<4$，得 $11\leqslant n\leqslant 14$；

若$[\lg 2^{n-1}]=4$，则 $4\leqslant\lg 2^{n-1}<5$，得 $15\leqslant n\leqslant 17$.

故 $T_{15}=4\times 0+3\times 1+3\times 2+4\times 3+1\times 4=25$.

质量评估(二)

1.D　**解析**：因为 $f(x)=x^2+x$，所以 $f'(x)=2x+1$，所以 $f'(1)=2\times 1+1=3$.故选 D.

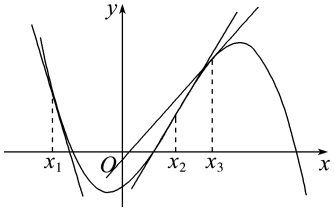
2.B　**解析**：因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-1}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-\ln e}{2\Delta x}$，

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+2\Delta x)-\ln x}{2\Delta x}=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-\ln e}{2\Delta x}=\dfrac{1}{e}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-1}{\Delta x}=\dfrac{2}{e}$.故选 B.

3.B　**解析**：分别作出函数 $f(x)$ 的图象在 $x=x_1$，$x=x_2$，$x=x_3$ 处的切线，如图所示.



根据导数的几何意义及图中切线的斜率可知，$f'(x_2)>f'(x_3)>0>f'(x_1)$.故选 B.

4.A　**解析**：由$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，可得 $-1<x<1$，即 $f(x)$ 的定义域为$(-1,1)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-x}{1+x}\times\dfrac{2}{(1-x)^2}-\cos x=\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x$.

由于 $1-x^2\in(0,1]$，故$\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x\geqslant 0$，

即 $f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

故 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增.又 $f(0)=0$，

所以 $f(x)$仅有一个零点.

故选 A.

5.A　**解析**：由题得函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=2-2\times\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{x}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$.

所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.故选 A.

6.D　**解析**：因为 $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$，所以 $y=f'(x)$的图象开口向上，排除②④.若 $y=f'(x)$的图象为

①，则 $a=0$，$f(-1)=\frac{5}{3}$.若 $y=f'(x)$ 的图象为③，则 $a^2-1=0$，得 $a=\pm1$.又对称轴 $x=-a>0$，所以 $a=-1$，所以 $f(-1)=-\frac{1}{3}$.

7.C　**解析**：$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx$，因为当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2，

所以 $\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b+3=2,\\a+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\a=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=2\ln x-x^2+3$，$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1-x)(1+x)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $f(x)_{\max}=f(1)=2$，符合题意，所以 $f(3)=2\ln 3-6$.

故选 C.

8.A　**解析**：对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=\frac{(e^x+2\cos x)(1+x^2)-(e^x+2\sin x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$，所以 $f'(0)=3$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-0)$，即 $3x-y+1=0$，切线与两坐标轴的交点分别为 $(0,1)$，$\left(-\frac{1}{3},0\right)$，所以切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.故选 A.

9.ACD　**解析**：对 A 选项，因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，而 $f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2=3(x-1)(x-3)$，

易知当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，故 A 正确；

对 B 选项，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2=x(1-x)>0$，所以 $1>x>x^2>0$，

由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(x^2)$，故 B 错误；

对 C 选项，当 $1<x<2$ 时，$1<2x-1<3$，由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f(1)>f(2x-1)>f(3)$，即 $-4<f(2x-1)<0$，故 C 正确；

对 D 选项，当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)-f(x)=(1-x)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(2-2x)>0$，所以 $f(2-x)>f(x)$，故 D 正确.故选 ACD.

10.AC　**解析**：由题得 $f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$；令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，所以 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点，故 A 正确.

因为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(-2)=-5<0$，所以，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上有一个零点，当 $x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上无零点.综上所述，函数 $f(x)$ 有一个零点，故 B 错误.

令 $h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$，所以 $h(x)$ 是奇函数，点 $(0,0)$ 是 $h(x)$ 图象的对称中心.将 $h(x)$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象，所以点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，故 C 正确.

令 $f'(x)=3x^2-1=2$，可得 $x=\pm1$.又 $f(1)=f(-1)=1$，所以当切点为 $(1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x-1$；当切点为 $(-1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x+3$，故 D 错误.

故选 AC.

11.BD　**解析**：函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.当 $0<x<1$ 或 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，故 A 不正确.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 的图象在 x 轴下方，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的图象在 x 轴上方，且当 $x=e$ 时，$f(x)=e$，显然 $f(|x|)$ 是偶函数，所以在方程 $f(|x|)=k$ 中，当 $k<0$ 或 $k=e$ 时，方程有两个不相等的实根；当 $0\leqslant k<e$ 时，方程无实根；当 $k>e$ 时，方程有 4 个不相等的实根，故 B 正确.

因为 $0<x_1<x_2<1$，所以 $f(x_2)<f(x_1)<0$，即 $\frac{x_2}{\ln x_2}<\frac{x_1}{\ln x_1}<0$，于是得 $x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$，故 C 不正确.

当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$g(x)$ 的值域为 $[a,+\infty)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[e,+\infty)$.因为 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$ 成立，从而 $[a,+\infty)\subseteq[e,+\infty)$，即得 $a\geqslant e$，故 D 正确.故选 BD.

12.$(-\infty,1)$　**解析**：因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.由 $f(2m)<f(m+1)$，得 $2m<m+1$，即 $m<1$，所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

13.4　0　**解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+b(x>0)$.

依题意，得 $\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-6,\\b=9.\end{cases}$ 所以 $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

令 $f'(x)=3x^2-12x+9=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,4]$ 上的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,4)$	4
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	单调递增	4	单调递减	0	单调递增	4

又当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，所以函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在区间$(0,4]$上的最大值是 4，最小值是 0.

14.$\left[\frac{\sqrt{e}}{e},\frac{2\sqrt{e}}{e}\right]$　**解析**：对于函数 $f(x)=ae^x-x^2$，$f'(x)=ae^x-2x$.由题知，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 为 $f(x)$的一个渐缓增区间.

令 $g(x)=ae^x-2x$，则 $g'(x)=ae^x-2$，

因为 $f'(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，

所以 $ae^x-2\leqslant 0$ 恒成立，即 $a\leqslant\frac{2}{e^x}$恒成立.

又$\frac{2}{e^x}>\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{e}}$，所以 $a\leqslant\frac{2\sqrt{e}}{e}$.

又 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，

所以 $f'(x)=ae^x-2x\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{2x}{e^x}$恒成立.

令 $h(x)=\frac{2x}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{2(1-x)}{e^x}>0$，

所以 $h(x)<h\left(\frac{1}{2}\right)$，即$\frac{2x}{e^x}<\frac{\sqrt{e}}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{\sqrt{e}}{e}$.

综合得$\frac{\sqrt{e}}{e}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{e}}{e}$，

即实数 a 的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{e}}{e},\frac{2\sqrt{e}}{e}\right]$.

15.解：(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2-2$，所以 $f'(x)=3x^2+2ax$，

所以 $f'(-2)=12-4a=0$，解得 $a=3$.经检验成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3+3x^2-2$，

所以 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.

所以当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(0,2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-2$.

因为 $f(-1)=0$，$f(2)=18$，所以 $f(x)_{\max}=18$.

16.解：(1)由题意可知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当 $a=2$ 时，$f(x)=2x-\ln x-\frac{2}{x}$，则 $f'(x)=2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$，

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=2-\frac{1}{1}+\frac{2}{1}=3$，

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$.

(2)$f'(x)=\frac{ax^2-x+a}{x^2}(x>0)$.

①若 $a\leqslant 0$，因为 $x>0$，$f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

②若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，即 $ax^2-x+a=0$，$\Delta=1-4a^2$.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$0<x_1<1<x_2$，

当 $x\in(0,x_1)$或 $x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增；

当 $x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在(x_1,x_2)内单调递减.

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$ 和 $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$ 内单调递减；

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

17.解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{e^x}-b$，则 $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$.当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以 $f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减.

(2)因为函数 $f(x)$的图象是连续的，且 $f(x)$不具有单调性，

所以 $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}-2a$ 的函数值有正有负($f'(x)$有异号零点).

记 $g(x)=f'(x)=\frac{2-x}{e^x}-2a$，则 $g'(x)=\frac{x-3}{e^x}$.当 $x\in(-\infty,3)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in(3,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

所以 $f'(x)$在$(-\infty,3)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增.

存在 $x_1=-|2a|$，使得 $f'(x_1)=\frac{2+|2a|}{e^{-|2a|}}-2a=(2+|2a|)e^{|2a|}-2a>0$，

故只需 $f'(x)_{\min}=f'(3)=-\frac{1}{e^3}-2a<0$，得 $a>-\frac{1}{2e^3}$，即实数 a 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2e^3},+\infty\right)$.

18.解：(1)因为蓄水池侧面的总成本为 $100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$(元)，

底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，所以修建蓄水池的总成本为$(200\pi rh+160\pi r^2)$元.

根据题意得 $200\pi rh+160\pi r^2=12\,000\pi$，

所以 $h=\frac{1}{5r}(300-4r^2)$，

从而 $V(r)=\pi r^2h=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$.

由 $r>0$，$h>0$，可得 $0<r<5\sqrt{3}$，

故函数 $V(r)$ 的定义域为 $(0,5\sqrt{3})$.

(2)因为 $V(r)=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$,$0<r<5\sqrt{3}$,

所以 $V'(r)=\frac{\pi}{5}(300-12r^2)$.

令 $V'(r)=0$,解得 $r_1=5$,$r_2=-5$(舍去).

当 $r\in(0,5)$ 时,$V'(r)>0$,故 $V(r)$ 在 $(0,5)$ 上单调递增;

当 $r\in(5,5\sqrt{3})$ 时,$V'(r)<0$,故 $V(r)$ 在 $(5,5\sqrt{3})$ 上单调递减.

由此可知,$V(r)$ 在 $r=5$ 时取得最大值 $V(5)=200\pi$,此时 $h=8$.

故当 $r=5$,$h=8$ 时,该蓄水池的体积最大.

19.解:(1)因为 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$,$f'(x)=\lambda e^{\lambda x}-4\cos x$,

所以 $f'(0)=\lambda-4$,所以切线斜率为 $\lambda-4$,即 $a=\lambda-4$,

所以切线方程为 $y=(\lambda-4)x-\lambda+1$.

又 $f(0)=\lambda-1$,所以切点坐标为 $(0,\lambda-1)$,代入得

$\lambda-1=-\lambda+1$,解得 $\lambda=1$.

(2)由(1)得 $f(x)=e^x-4\sin x-1$,$f'(x)=e^x-4\cos x$,

令 $g(x)=f'(x)=e^x-4\cos x$,则 $g'(x)=e^x+4\sin x$,

当 $x\geqslant\pi$ 时,$f'(x)=e^x-4\cos x>0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)\geqslant f(\pi)=e^{\pi}-4\sin\pi-1=e^{\pi}-1>0$.

因此 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点.

当 $0<x<\pi$ 时,$g'(x)=e^x+4\sin x>0$ 恒成立,所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增,

又 $f'(0)=-3<0$,$f'(\pi)=e^{\pi}+4>0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_0,

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

又 $f(0)=0$,$f(x_0)<f(0)=0$,$f(\pi)=e^{\pi}-1>0$,

因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有 1 个零点.

综上,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有 1 个零点.

综合质量评估(一)

1.C **解析**:$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=-\frac{1}{2}f'(1)=4$,所以 $f'(1)=-8$.

故选 C.

2.C **解析**:由题意得 $a_1+a_2+a_3=3a_2=6$,解得 $a_2=2$,

$a_4+a_6=2a_5=-20$,解得 $a_5=-10$,

故等差数列的公差 $d=\frac{a_5-a_2}{5-2}=\frac{-10-2}{3}=-4$,

故 $a_8=a_2+6d=2-6\times4=-22$.

故选 C.

3.D **解析**:由题可知 $x\in\mathbf{R}$,因为函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$,所以 $f'(x)=e^x-\frac{a}{e^x}$.

又因为 $f'(x)$ 是奇函数,所以 $f'(0)=1-a=0$,

所以 $a=1$,经检验,符合题意,

所以 $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$,$f'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\frac{3}{2}$,

所以 $\frac{3}{2}=e^x-\frac{1}{e^x}$,解方程可得 $x=\ln2$.

故选 D.

4.B **解析**:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d<0)$,由 a_3,a_4,a_7 成等比数列,

得 $(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+6d)$,

解得 $a_1=-\frac{3}{2}d$,则 $a_n=a_1+(n-1)d=\left(n-\frac{5}{2}\right)d$.

显然等差数列 $\{a_n\}$ 是递减数列,当 $n\leqslant2$ 时,$a_n>0$,当 $n\geqslant3$ 时,$a_n<0$,

所以当 S_n 取最大值时,$n=2$.

故选 B.

5.B **解析**:函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(m,m+\frac{1}{3}\right)$ 上不单调,

所以 $\begin{cases}m>0,\\m<1<m+\frac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}<m<1$.

故选 B.

6.B **解析**:由 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$ 且 $a_1=1$,得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$,

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$,$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{4}$,$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{5}$,…,$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-2}{n}$,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant2)$.

所以 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\ldots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$,所以 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n(n+1)}$.

因为 $a_1=1$,所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

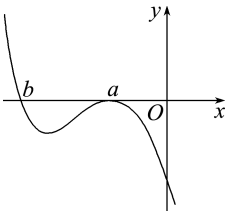
因为 $a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

故选 B.

7.D **解析**:若 $a=b$,则 $f(x)=a(x-a)^3$ 为单调函数,无极值点,不符合题意,故 $a\neq b$.

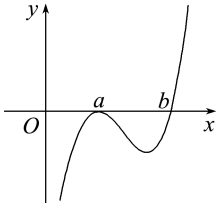
所以 $f(x)$ 有 a 和 b 两个不同零点,且在 $x=a$ 左右附近是不变号的,在 $x=b$ 左右附近是变号的.依题意,a 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点,所以在 $x=a$ 左右附近 $f(x)$ 都是小于零的.

当 $a<0$ 时,由 $x>b$ 时,$f(x)\leqslant0$,画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f(x)>0$，画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^2$.

综上所述，$ab>a^2$ 成立.

故选 D.

8.C　**解析**：记数列 1，1，2，8，64，…为 $\{a_n\}$，设 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，

则 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$，$b_4=8$，…，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n=2^{n-1}$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot b_{n-3}\cdot\cdots\cdot b_1\cdot a_1=2^{1+2+3+\cdots+(n-2)}=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，所以 $a_8=2^{\frac{7\times 6}{2}}=2^{21}$.

故选 C.

9.ACD　**解析**：对于 A，$2a_1=\dfrac{3\times 1^2+5\times 1}{2}=4$，即 $a_1=2$，故 A 正确.

对于 B，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\dfrac{3n^2+5n}{2}$①，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\dfrac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}(n\geqslant 2)$②，

①－②得 $2^na_n=3n+1$，$a_n=\dfrac{3n+1}{2^n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{3\times 1+1}{2^1}=2$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{3n+1}{2^n}$，故 B 错误.

对于 C，令 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{3n+4}{2^{n+1}}-\dfrac{3n+1}{2^n}=\dfrac{3n+4-(6n+2)}{2^{n+1}}=\dfrac{-3n+2}{2^{n+1}}$，

因为 $n\geqslant 1$，所以 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{-3n+2}{2^{n+1}}<0$，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 C 正确.

对于 D，$c_n=\dfrac{1}{2^{2n+1}\cdot\frac{3n+1}{2^n}\cdot\frac{3n+4}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}\right)$，

$S_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3n+4}\right)=\dfrac{n}{12n+16}$，故 D 正确.

故选 ACD.

10.ABD　**解析**：由已知 $f(x)=e^x+\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$，得 $f'(x)=e^x+\cos x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\sin x$，

当 $x\in(-\pi,0]$ 时，$e^x>0$，$-\sin x\geqslant 0$，$g'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x>1$，$-\sin x\in[-1,1]$，$g'(x)>0$，

即当 $x\in(-\pi,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

$f'(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$，$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$f'(0)=2>0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>f'(0)>0$，且存在唯一实数 $x_0\in\left(-\dfrac{3\pi}{4},-\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=-\cos x_0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，且 $f(x)$ 存在唯一极小值点 x_0，故 A，B 选项正确.

由上述知 $f(x)$ 在 $(-\pi,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(-\pi)=e^{-\pi}+0>0$，$f(x_0)=e^{x_0}+\sin x_0=\sin x_0-\cos x_0=\sqrt{2}\sin\left(x_0-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，$f(0)=1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有两个零点，故 D 选项正确，C 选项错误.

故选 ABD.

11.ABC　**解析**：对于 A，由题图可知，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x-2)-f(-2)}{\Delta x}=f'(-2)<0$，故 A 正确；

对于 B，由题图可知，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，故 B 正确；

对于 C，由题图可知，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$，$f'(x)<0$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，故 C 正确；

对于 D，由题图可知，当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，无最大值，故 D 错误.

故选 ABC.

12.4　± 2　**解析**：若 a，b，c 三个数成等差数列，

则 $b=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}=4$.

若 a，b，c 三个数成等比数列，

则 $b^2=ac=(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})=4\Rightarrow b=\pm 2$.

13.$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　**解析**：因为 $y=(x+a)\cdot e^x$，所以 $y'=(x+1+a)e^x$.

设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$，切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$，

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点，所以 $-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(-x_0)$，

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$.

因为切线有两条，所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

14.$(-1,3)$　**解析**：由题得函数的定义域为 **R**.因为 $f(-x)=e^{-x}-e^{x}+2x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数.又 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

所以函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，$f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 等价于 $f(t+3)>-f(t-t^2)=f(t^2-t)$，

所以 $t+3>t^2-t$，所以 $t^2-2t-3<0$，解得 $-1<t<3$.

所以实数 t 的取值范围为 $(-1,3)$.

15.解：(1)因为 $2S_n=na_n$，所以

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，即 $a_1=0$，

当 $n=3$ 时，$2(0+1+a_3)=3a_3$，即 $a_3=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}$，即 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

化简得，$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，当 $n\geqslant 3$ 时，$\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\dfrac{a_3}{2}=1$，即 $a_n=n-1$，当 $n=1,2,3$ 时 $a_n=n-1$ 仍成立，所以 $a_n=n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)因为 $\dfrac{a_n+1}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，所以 $T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\dfrac{1}{2}T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

两式相减得，

$$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

则 $T_n=2-(2+n)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

16.(1)**解**：由题设 $f(x)=e^{x}+ax$.当 $a=1$ 时，$g(x)=e^{x}+\dfrac{1}{2}x^2$，$f(x)=e^{x}+x$，则 $f(1)=e+1$，$g(1)=e+\dfrac{1}{2}$，

故曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线的方程为 $y-g(1)=f(1)(x-1)$，

整理得 $2(e+1)x-2y-1=0$.

(2)**证明**：由(1)得 $f(x)=e^{x}+ax$，求导得 $f'(x)=e^{x}+a$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)$ 不存在极值.

当 $a<0$ 时，存在 $x_0\in\mathbf{R}$，

使得 $f'(x_0)=0$，且 $x_0=\ln(-a)$，

在 $(-\infty,x_0)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $(x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)$ 存在极值 $f(x_0)$.

由计算得 $f(x_0)=f(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}+a\ln(-a)=-a+a\ln(-a)$.

设 $h(a)=-a+a\ln(-a)$，$a<0$，则 $h'(a)=-1+\ln(-a)+1=\ln(-a)$.

当 $a<-1$ 时，$h'(a)=\ln(-a)>0$；当 $-1<a<0$ 时，$h'(a)=\ln(-a)<0$，

所以 $a=-1$ 时，$h(a)$ 取得极大值，也是最大值，故 $h(a)\leqslant h(-1)=1-\ln 1=1$，

即 $f(x)$ 的极值小于或等于 1.

17.解：(1)因为 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y=-x+1$，

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-1$，

则 $\begin{cases}1-1^3\times e^{a+b}=0,\\1-(3+a)e^{a+b}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$

所以 $a=-1$，$b=1$.

(2)由(1)得 $g(x)=f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}$($x\in\mathbf{R}$)，

则 $g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$.

令 $x^2-6x+6=0$，解得 $x=3\pm\sqrt{3}$，不妨设 $x_1=3-\sqrt{3}$，$x_2=3+\sqrt{3}$，则 $0<x_1<x_2$，

易知 $e^{-x+1}>0$ 恒成立，

所以令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$；令 $g'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x_1<x<x_2$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 和 (x_1,x_2) 上单调递增，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3-\sqrt{3})$ 和 $(3+\sqrt{3},+\infty)$，单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

18.解：(1)由 $S_1=\left(\dfrac{a_1+1}{2}\right)^2=a_1$，解得 $a_1=1$.

又 $S_2=a_1+a_2=1+a_2=\left(\dfrac{a_2+1}{2}\right)^2$，所以 $a_2=3$ 或 -1.

因为 $a_2=-1$ 时，$a_3=-3$，此时 $S_3=a_1+a_2+a_3=-3\neq\left(\dfrac{a_3+1}{2}\right)^2=1$，故 $a_2=-1$ 舍去.

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=2$，

所以 $a_n=2n-1$.

同理可得 $b_1=1$，$b_2=3$ 或 -1.

因为 $b_2=3$ 时，$b_3=9$，此时 $T_3=b_1+b_2+b_3=13\neq\left(\dfrac{b_3+1}{2}\right)^2=25$，故 $b_2=3$ 舍去.

又 $\{b_n\}$ 为等比数列，所以 $b_n=(-1)^{n-1}$.

(2)因为 $M_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，

所以 $M_n=1\times(-1)^0+3\times(-1)^1+5\times(-1)^2+\cdots+(2n-1)\times(-1)^{n-1}$①，

则 $-M_n=1\times(-1)^1+3\times(-1)^2+5\times(-1)^3+\cdots+(2n-1)\times(-1)^n$②，

①－②得 $2M_n=1+2\times(-1)^1+2\times(-1)^2+2\times(-1)^3+\cdots+2\times(-1)^{n-1}-(2n-1)\times(-1)^n=1+2\times\dfrac{(-1)-(-1)^{n-1}\times(-1)}{1-(-1)}-(2n-1)\times(-1)^n$，

所以 $M_n=n\times(-1)^{n-1}$.

19.解：(1)因为 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，该函数的定义域为 **R**，所以 $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

由表可得 $f(x)_{极小值}=f(0)=0$，$f(x)_{极大值}=f(2)=\frac{4}{e^2}$.

(2)由题意可得，$\forall x_1\in[-1,0]$，$\exists x_2\in[2,e^2]$，使 $f(x_1)_{max}\leqslant g(x_2)$成立.

由(1)可知 $f(x_1)$在$[-1,0]$上单调递减，

所以 $f(x_1)_{max}=f(-1)=e$，所以 $\ln x_2-ax_2+e\geqslant e$ 在$[2,e^2]$上有解，即 $a\leqslant\frac{\ln x_2}{x_2}$在$[2,e^2]$上有解.

令 $h(x_2)=\frac{\ln x_2}{x_2}$，$x_2\in[2,e^2]$，则 $h'(x_2)=\frac{1-\ln x_2}{x_2^2}$，令 $h'(x_2)=0$，得 $x_2=e$.

当 x_2 变化时，$h'(x_2)$，$h(x_2)$的变化情况如下表：

x_2	2	$(2,e)$	e	(e,e^2)	e^2
$h'(x_2)$		+	0	−	
$h(x_2)$	$\frac{\ln 2}{2}$	单调递增	极大值$\frac{1}{e}$	单调递减	$\frac{2}{e^2}$

所以 $h(x_2)_{max}=\frac{1}{e}$，所以 $a\leqslant\frac{1}{e}$.故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

综合质量评估(二)

1.A　解析：设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_3+a_5=4$，

所以$\begin{cases}a_1+d=1,\\2a_1+6d=4,\end{cases}$

解得 $d=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{1}{2}$，所以该数列的公差为$\frac{1}{2}$.故选 A.

2.B　解析：因为数列$\{a_n\}$为等比数列，

$a_1=2$，$a_5=4$，所以 $a_3^2=a_1\cdot a_5=8$，

得 $a_3=\pm2\sqrt{2}$.

又 a_1，a_3，a_5 的符号相同，故 $a_3=2\sqrt{2}$.故选 B.

3.C　解析：因为 $T_{13}=4T_9$，

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{13}=4a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_9$，

所以 $a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}=4$.

又因为 $a_{10}a_{13}=a_{11}a_{12}=a_8a_{15}$，

所以$(a_8a_{15})^2=4$，所以 $a_8a_{15}=\pm2$.

又因为$\{a_n\}$为递减数列，所以 $q>0$，所以 $a_8a_{15}=2$.故选 C.

4.D　解析：因为函数 $f(x)$是奇函数，

所以 $a-1=0$，解得 $a=1$.

所以 $f(x)=x^3+x$，$f'(x)=3x^2+1$，

所以 $f'(0)=1$，$f(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线的方程为 $y=x$.故选 D.

5.C　解析：因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n+n=2a_n-1$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}+(n-1)=2a_{n-1}-1$，

两式相减得 $a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}+1$，

可得 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$.

当 $n=1$ 时，可得 $S_1+1=2a_1-1$，即 $a_1+1=2a_1-1$，解得 $a_1=2$，

所以数列$\{a_n+1\}$是首项为 $a_1+1=3$，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n+1=3\cdot2^{n-1}$，即 $a_n=3\cdot2^{n-1}-1$，所以 $a_5=3\cdot2^4-1=47$.

故选 C.

6.A　解析：设水箱的底面边长为 x，高为 h，

则容积 $V=x^2\cdot h=256$，

所以 $h=\frac{256}{x^2}$.

所以表面积 $S=x^2+4xh=x^2+4x\cdot\frac{256}{x^2}$

$=x^2+\frac{1\,024}{x}$，

所以 $S'=2x-\frac{1\,024}{x^2}$.

令 $S'=0$，解得 $x=8$.

易知当 $x=8$ 时，S 取得最小值.

此时 $h=\frac{256}{8^2}=4$.故选 A.

7.A　解析：设 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a-x^2+3x=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+a$，

则 $h'(x)=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$，

所以当 $x\in[1,3)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当 $x\in(3,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

所以当 $x=3$ 时，函数 $h(x)$取得的极小值也是最小值.

因为 $f(x)$的图象始终在 $g(x)$的图象上方，

所以 $h(x)_{min}>0$，即 $h(3)=a>0$，

所以实数 a 的取值范围是$(0,+\infty)$.故选 A.

8.A　解析：构造函数 $g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$，

则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}<0$，

所以函数 $g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$在 **R** 上单调递减.

由于函数 $y=f(x)-2\,024$ 为 **R** 上的奇函数，

所以 $f(0)-2\,024=0$，得 $f(0)=2\,024$，

所以 $g(0)=\frac{f(0)-1}{e^0}=2\,023$.

由 $f(x)-2\,023e^x<1$，

得 $f(x)-1<2\,023e^x$，

所以$\frac{f(x)-1}{e^x}<2\ 023$，即$g(x)<g(0)$.

由于函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

因此$x>0$.故选A.

9.AC　**解析**：因为S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，

且$S_n=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$S_1=2a_1+1$，

因此$a_1=-1$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，

即$a_n=2a_{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$是以-1为首项，2为公比的等比数列，故C正确；

因此$a_5=-1\times 2^4=-16$，故A正确；

又$S_n=2a_n+1$，所以$S_5=2a_5+1=-31$，故B错误；

因为$S_1+1=0$，所以数列$\{S_n+1\}$不是等比数列，故D错误.故选AC.

10.AD　**解析**：对于A，$f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}$，

$f(5)=\frac{\ln 5}{5}=\ln\sqrt[5]{5}$，又$(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$，

$(\sqrt[5]{5})^{10}=25$，$32>25$，所以$\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$，则$\ln\sqrt{2}>\ln\sqrt[5]{5}$，

即$f(2)>f(5)$，A正确.

对于B，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以$f(x)$有极大值$f(e)=\frac{1}{e}$.

若$f(x)=m$有两个不相等的正实根x_1，x_2，不妨取$x_2=e^3$，显然$x_2>2e$，此时不满足$x_1+x_2<2e$，B不正确.

对于C，由B可知，$f(x)$在$(0,e)$上单调递增，则有$f(2)<f(e)$，即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}$，则有$\ln 2<\frac{2}{e}<\sqrt{\frac{2}{e}}$，C不正确.

对于D，令$2^x=3^y=m$，x，y均为正数，则$m>1$，可得$x=\log_2 m=\frac{\ln m}{\ln 2}$，$y=\log_3 m=\frac{\ln m}{\ln 3}$，所以$2x-3y=\frac{2\ln m}{\ln 2}-\frac{3\ln m}{\ln 3}=\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}\right)\ln m$.因为$(\sqrt{2})^6=2^3<3^2=(\sqrt[3]{3})^6$，所以$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，$\ln\sqrt{2}<\ln\sqrt[3]{3}$，即$0<\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$，所以$\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}>0$，所以$2x-3y>0$，D正确.故选AD.

11.ABC　**解析**：对于A，由$f(x)=x^3-ax^2-2x$，

得$f'(x)=3x^2-2ax-2$.若1是函数$f(x)$的极值点，

则$f'(1)=3-2a-2=0$，得$a=\frac{1}{2}$，经检验，

1是函数$f(x)$的极小值点，所以A正确.

对于B，由选项A的分析可知$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，

则$f'(x)=3x^2-x-2$.由$f'(x)>0$，得$x<-\frac{2}{3}$或$x>1$；由$f'(x)<0$，得$-\frac{2}{3}<x<1$.所以当$x\in[0,2]$时，$f(x)$在$[0,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，故当$x=1$时，$f(x)$取得最小值$f(1)=1-\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$，所以B正确.

对于C，因为$f(x)$在$(1,2)$上单调递减，所以$f'(x)=3x^2-2ax-2\leqslant 0$，即$a\geqslant\frac{3}{2}x-\frac{1}{x}$在$(1,2)$上恒成立.令$g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{x}$，$x\in(1,2)$，则$g'(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{x^2}>0$，所以$g(x)$在$(1,2)$上单调递增，所以$g(1)<g(x)<g(2)$，即$\frac{1}{2}<g(x)<\frac{5}{2}$，所以$a\geqslant\frac{5}{2}$，所以C正确.

对于D，由$x^2\ln x\geqslant f(x)$在$[1,2]$上恒成立，

得$x^2\ln x\geqslant x^3-ax^2-2x$在$[1,2]$上恒成立，

即$a\geqslant x-\ln x-\frac{2}{x}$在$[1,2]$上恒成立.

令$h(x)=x-\ln x-\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$，

则$h'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-x+2}{x^2}>0$，

所以$h(x)$在$[1,2]$上单调递增，

所以$h(x)_{\max}=h(2)=2-\ln 2-1=1-\ln 2$，

所以$a\geqslant 1-\ln 2$，所以D错误.故选ABC.

12.$[-1,+\infty)$　**解析**：$f(x)=\frac{e^x}{x}+k\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+k\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{(e^x+k)(x-1)}{x^2}$.

因为1是函数$f(x)$的唯一极值点，

所以1是方程$f'(x)=0$的唯一根.

①当$e^x+k=0$在$(0,+\infty)$上无实数根时，

令$g(x)=e^x+k$，则$g'(x)=e^x>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$g(0)=1+k$，所以$1+k\geqslant 0$，解得$k\geqslant -1$.

②当$g(x)=e^x+k$在$(0,+\infty)$上有零点1时，

此时$e+k=0$，解得$k=-e$，

此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不符合题意.所以k的取值范围是$[-1,+\infty)$.

13.$\left(\frac{1}{2},1\right)$　**解析**：易知$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$$(x>0)$.

①当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，不合题意；

②当$a>0$时，函数$f(x)$的极值点为$\frac{1}{a}$.

若函数$f(x)$在区间$(1,2)$上不单调，必有$1<\frac{1}{a}<2$，解得$\frac{1}{2}<a<1$.

14.$4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\ 010}$　**解析**：由已知得$b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}$，$b_{2n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}$，所以$b_{2n}+b_{2n+1}=a_{2n+2}+a_{2n}=\frac{6}{2^n}$，即数列$\{a_n\}$的前2 024项中偶数项的和为$(a_2+a_4)+(a_6+$

$a_8)+\cdots+(a_{2\,022}+a_{2\,024})=\frac{6}{2^1}+\frac{6}{2^3}+\frac{6}{2^5}+\cdots+\frac{6}{2^{1\,011}}=$

$\frac{6}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{506}}{1-\frac{1}{4}}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,010}$.

又由已知得 $b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}$，$b_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-1}$，且 $b_{2n}=b_{2n-1}$，所以 $a_{2n+1}=-a_{2n-1}$，即数列 $\{a_n\}$ 的奇数项为首项为 1，公比为 -1 的等比数列，即 $a_{2n-1}=(-1)^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），即数列 $\{a_n\}$ 的前 2 024 项中奇数项的和为 0.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的前 2 024 项和为 $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,010}$.

15.解：(1)由 $f(x)=x-\sin x-\cos x$，

得 $f'(x)=1-\cos x+\sin x$，

所以，$f(0)=-1$，$f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的方程为 $y+1=0$，即 $y=-1$.

(2)令 $f'(x)=1+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$，

得 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

由于 $x\in[0,2\pi]$，

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}+1$，

又 $f(0)=-1$，$f(2\pi)=2\pi-1$，所以 $f(x)_{\min}=-1$.

16.解：(1)由题意可得 $27\,000a+630=180$，

解得 $a=-\frac{1}{60}$.

当对甲项目投资 30 万元时，对乙项目投资 170 万元，则 $-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$，

解得 $b=110$.

当对甲项目的投资金额为 x 万元时，则对乙项目的投资金额为 $(200-x)$ 万元，

则 $\begin{cases}x\geqslant10,\\200-x\geqslant10,\end{cases}$

解得 $10\leqslant x\leqslant190$.

故 $f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2$

$=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16\,200)(10\leqslant x\leqslant190)$.

(2)设 $h(x)=x^3-2x^2-900x-16\,200(10\leqslant x\leqslant190)$，

则 $h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$.

当 $x\in[10,18)$ 时，$h'(x)<0$，

当 $x\in(18,190]$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[10,18)$ 上单调递减，在 $(18,190]$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(18)=-27\,216$.

故 $f(x)_{\max}=453.6$.

即对甲项目投资 18 万元，对乙项目投资 182 万元时，才能使总收益最大，最大总收益为 453.6 万元.

17.解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，

由 $\begin{cases}b_2=b_1q=3,\\b_3=b_1q^2=9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b_1=1,\\q=3.\end{cases}$

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

又 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=3^{4-1}=27$，

所以 $1+(14-1)d=27$，解得 $d=2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$.

(2)设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

因为 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，

所以 $S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$=2\times1-1+3^0+2\times2-1+3^1+2\times3-1+3^2+\cdots+2n-1+3^{n-1}=2(1+2+\cdots+n)-n+(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})=2\times\frac{(n+1)n}{2}-n+\frac{3^0\times(1-3^n)}{1-3}=n^2+\frac{3^n-1}{2}$.

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $n^2+\frac{3^n-1}{2}$.

18.解：(1)由题意知 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$1-ax>0$，

则 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}>0$，

易知当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)$f(x)$ 仅有一个零点等价于 $\ln x-ax=0$ 有且仅有一个根，即 $a=\frac{\ln x}{x}$ 有且仅有一个根.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f(x)$ 仅有一个零点等价于 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个交点.

因为 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$；

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$.

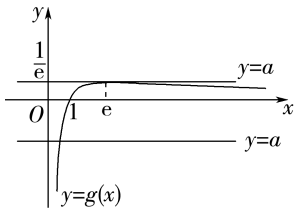
所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调

递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

又 $g(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，

函数 $y=g(x)$ 的大致图象如图所示.



由图象可知，当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $a\leqslant 0$ 时，$y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个交点.

所以若 $f(x)$ 仅有一个零点，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\left\{\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

19.解：(1)选择①②.

由 $2S_{n+1}=S_n+1$，得当 $n\geqslant 2$ 时，有 $2S_n=S_{n-1}+1$，

两式相减得 $2a_{n+1}=a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\geqslant 2$.

又当 $n=1$ 时，有 $2S_2=2(a_1+a_2)=S_1+1$，

且 $a_2=\frac{1}{4}$，

所以 $a_1=\frac{1}{2}$，且 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

选择②③.

由 $S_n=1-2a_{n+1}$，得当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=1-2a_n$，

两式相减得 $a_n=-2a_{n+1}+2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\geqslant 2$.

又当 $n=1$ 时，有 $S_1=1-2a_2=a_1$.

且 $a_2=\frac{1}{4}$，所以 $a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

选择①③.

由 $2S_{n+1}=S_n+1$，$S_n=1-2a_{n+1}$，

得 $2S_{n+1}=2-2a_{n+1}$，

即 $S_{n+1}=1-a_{n+1}$，所以 $S_n=1-a_n(n\geqslant 2)$，

两式相减可得 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，由 $2S_{n+1}=S_n+1$，得 $2S_2=S_1+1$，

即 $2(a_1+a_2)=a_1+1$，即 $a_1+2a_2=1$.

由 $S_n=1-2a_{n+1}$，得 $S_1=1-2a_2$，

即 $a_1=1-2a_2$，与上式相同，不能求出 a_1 的值.

故不能选择①③.

设正项等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

因为 $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列，

所以 $(b_3-2)^2=b_1b_7$，即 $(3+2d-2)^2=3(3+6d)$，

解得 $d=4$ 或 $d=-\frac{1}{2}$(舍)，

所以 $b_n=3+4(n-1)=4n-1$.

故 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$b_n=4n-1$.

(2)由题可知 $c_n=\frac{b_n}{a_n}=(4n-1)\times 2^n$，

所以 $T_n=3\times 2^1+7\times 2^2+11\times 2^3+\cdots+(4n-1)\times 2^n$，

则 $2T_n=3\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(4n-5)\times 2^n+(4n-1)\times 2^{n+1}$，

两式相减得

$$\begin{aligned}-T_n&=6+4(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(4n-1)\times 2^{n+1}\\&=6+4\times\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(4n-1)\times 2^{n+1}\\&=-10+2^{n+1}(5-4n).\end{aligned}$$

所以 $T_n=10+2^{n+1}(4n-5)$.